técnica

associação dos estudantes
do instituto superior técnico
revista de engenharia
outubro 1972

416

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA
S. A. R. L.

SEDE
Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO
TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO
Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA
TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 49 1

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO E DAS CENTRAIS DO FREIXO E DA CACHOFARRA

●

A **UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA** distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal
Telefs. 228824/5

Escritório:

Av. Conselheiro Fernando de Sousa, 19, 18.º piso

LISBOA 1 Telef. 65 54 31

técnica

NÚMERO 416 OUTUBRO DE 1972 ANO XLVII VOLUME XXXV PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José Toscano

CHEFE DE REDACÇÃO
Francisco Pedroso

ADMINISTRADOR
José de Oliveira Paulo

SECRETÁRIO
António Vieira Pita

REDACTORES
António Mouraz Miranda, Carlos Oliveira e Costa, José Sá da Costa, José Simões, José Xambre Bento, Maria João Loureiro da Costa, Maria Teresa Lemos, Rogério Pinto

CONSELHO REDACTORIAL
A. Ferreira dos Santos, A. Rocha Trindade, A. Romão Dias, Aquiles Gomes, Carlos Rosmaninho, Domingos Moura, F. Sousa Marques, H. Nunes Garcia, J. Borges da Silva, J. Brazão Farinha, J. P. Figanier, L. Aires - Barros, L. Borges Teixeira

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 73 15 49

PROPRIETÁRIO E EDITOR
A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	95$00	180$.
Ultramar, Brasil Espanha	100$00	190$.
Estrangeiro	—	200$.
Número avulso ...	—	25$.

Não se publica em Agosto e Setembro

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

★

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO NA
MOVIGRÁFICA
Rua do Espírito Santo, 19 - A Odivelas

SUMÁRIO

1 — RUI NUNES CORREIA — *Transformações no revenido dos aços Martensíticos com 12% de crómio*
Transformations during tempering of 12% chromium martensite steel.

7 — DIAMANTINO F. G. DURÃO — *Rotor e taxa de compressão de motores tipo Wankel.*
Rotor and compression ratio of Wankel type engines.

17 — ANTÓNIO DUARTE SILVA e EDUARDO C. MARÇAL GRILO — *A teoria das linhas de escorregamento — aplicação à extrusão.*
Theory of slit lines-application to extrusion.

25 — J. LOUREIRO PINTO — *Deformabilidade de rochas xistosas.*
Desformability of the schistie rocks.

31 — LUÍS G. BRAGA DA CRUZ — *O efeito da deformabilidade axial das barras no cálculo de estruturas porticadas de grande altura.*
The effect of axial deformations of columns in the calculus of structures in very high trames.

41 — HERMÍNIO DUARTE RAMOS — *Análise da estrutura dos sistemas de controle.*
Structural Analysis of Control Systems.

49 — DR. L. D. PETTIT — *Two conferences on coordination chemistry.*
Duas conferências sobre química de coordenação.

53 — JOSÉ SOARES AMARO — *A engenharia Sanitária. Um movimento que ganha vulto entre nós lançado pela Ordem dos Engenheiros.*
Sanitary Engineering.

BIBLIOGRAFIA.

CAPA — A degradação do meio ambiente é um problema que mobilizou a opinião pública e que se tem prestado às mais diversas especulações. A Técnica propõe-se abordar este tema no intuito de contribuir, pela apresentação de dados considerados de interesse, para uma acertada formulação da questão. Assim, será apresentado no próximo número um artigo de carácter genérico e prevê-se a publicação de outros em que se proceda ao tratamento científico de questões particulares.

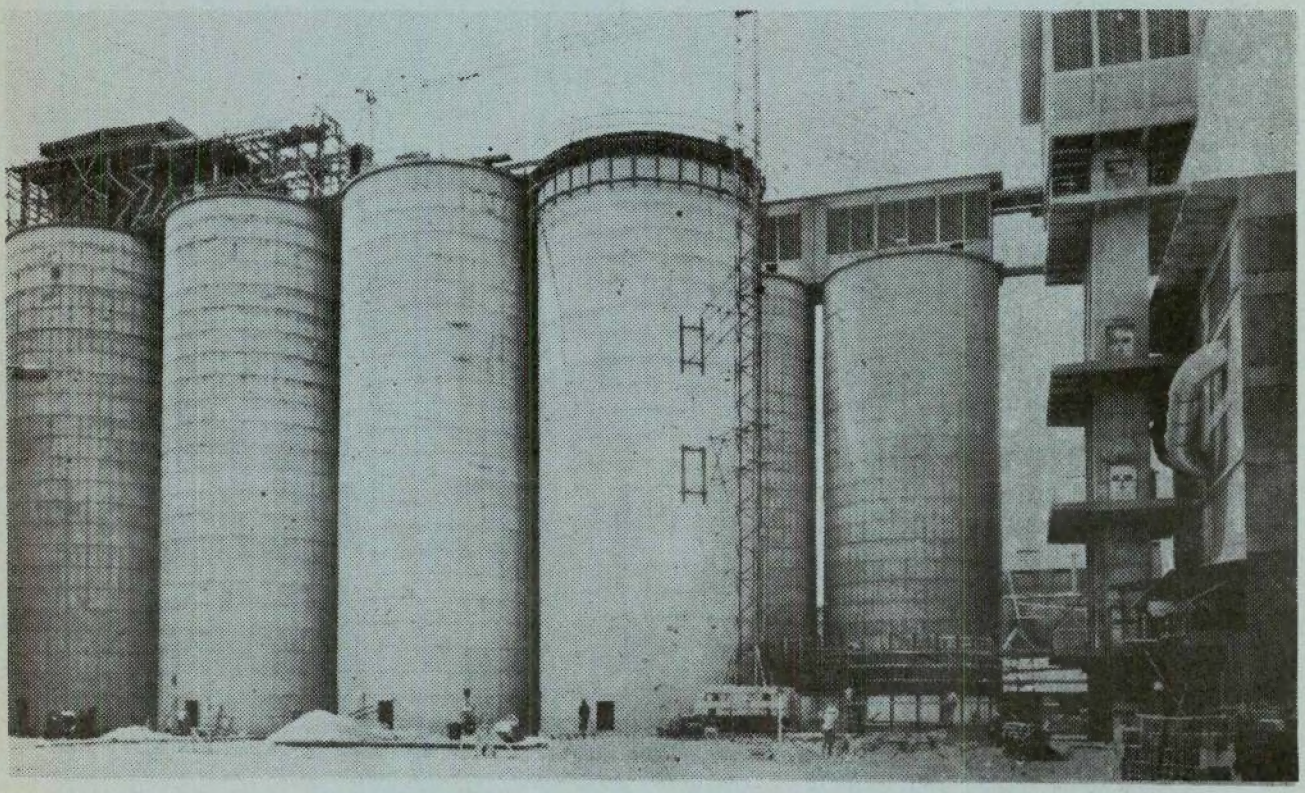
INDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Argilex	XXIX
Cimento Secil	2.ª da capa
COBA	XXVII
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Cometna	XIV
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
EFACEC	XXI
Eficex Kienzle	II
Electrotécnicos Reunidos	XV
Electro-Arco, Lda.	XIV
Empresa de Cimentos de Leiria	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Guedes & Almeida, Lda.	IV e VIII
H. Hagen, Lda.	XXVI
Heliaço	2.ª da capa
Hidrel	XIX
Harker Sumner	XXV
Isolux	IV
Johann Keller	VI
J. F. Azevedo e Silva	VII
J. Roma	II
Lecabetão	XXVI
Livros Técnicos	V
MAGUE	XIII
Monteiro Gomes	XIX
Mendes de Almeida	XIV
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Plessey Automática Eléctrica	XIX
Romar	XXX
Salvador Caetano	XXIII
SEPSA	
Siemens	XII
Soc. Electricidade Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Amadeu Gaudêncio	XXIX
Soc. Industrial Metalúrgica	XXIX
Sociedade Portuguesa Cavan	XIX
S. K. F. Lda.	XXIV
Sondagens e Fundações A. Cavaco	V
Sondagens Ródio, Lda.	VI
Sopecate	II
Standard Eléctrica	IX
União Eléctrica Portuguesa	2.ª da capa
Valadas, Lda.	XXII
Wild Portugal, Lda.	III

Colaboraram neste número as seguintes Agências de Publicidade:

P. G. SEELOW & ASSOCIADOS, LDA., PUBLIMPAR, SÉRIO, MIRA, SONARTE, ESTÚDIO TÉCNICO DE PUBLICIDADE, SUIÇO - PORTUGUÊS

na base da construção moderna: estacas FRANKI, moldadas no solo.



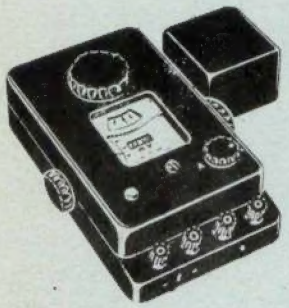
A elevada gama de diâmetros das estacas Franki permite a melhor adaptação a cada problema concreto de fundações, desde a construção mais ligeira até à de grande concentração de cargas muito elevadas. Material permanentemente actualizado e pessoal com especialização constantemente aprofundada garantem a segurança, rapidez e economia das fundações executadas.

FRANKI

Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO



Aparelhagem de medidas eléctricas

- indicadora
- reguladora
- registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S. 3 PORTO Tel. 0236732

fundações

sondagens

Sopecate

especialista há ‡1/4‡ de século

rua do arsenal 146-2º tlf 34010 • Lisboa

CALCULAR...

...instantâneamente, silenciosamente, com economia e segurança.

...programa de calculadores electrónicos de CASIO COMPUTER, Co. LTD TÓKYO-JAPÃO

...diversos modelos com as mais evoluídas características para toda a espécie de cálculos.

Demonstrações sem compromisso

-12 Modelos diferentes.

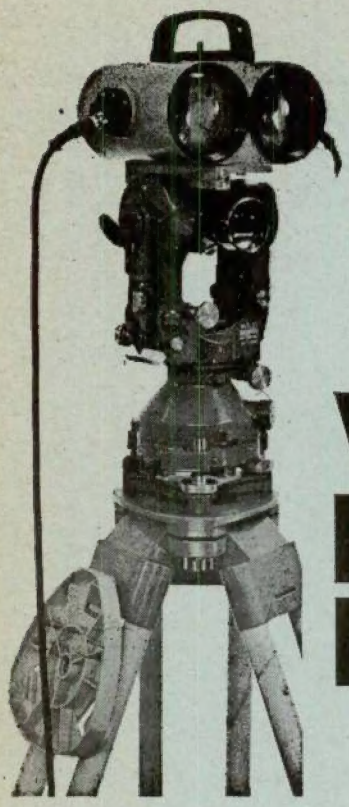
- 1 Programável.

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

EFICEX KIENZLE LISBOA: Av. João XXI, 4A tels 727028-727019

DISTRIBUIDORES NO NORTE:

HORBE, LDA PORTO: Rua Faria Guimarães, 105 - tel. 4 33 46



Agora

para distâncias

até 2000 m

WILD DISTOMAT DI 10

O mais recente modelo do único aparelho de medição de distâncias, por infra-vermelhos, em serviço desde 3 anos, permite alcance até 2000 m e é adaptável aos teodolitos WILD 11A, T16 e T2.

Esta combinação é a ideal para poligonações, levantamentos por radiação e para implantações.

Economiza	tempo, trabalho, dinheiro
Aumenta	precisão, rendimento, lucro
Aprovado	desde 3 anos em toda a parte do mundo
Garantido	pelos nossos serviços técnicos

WILD
HEERBRUGG

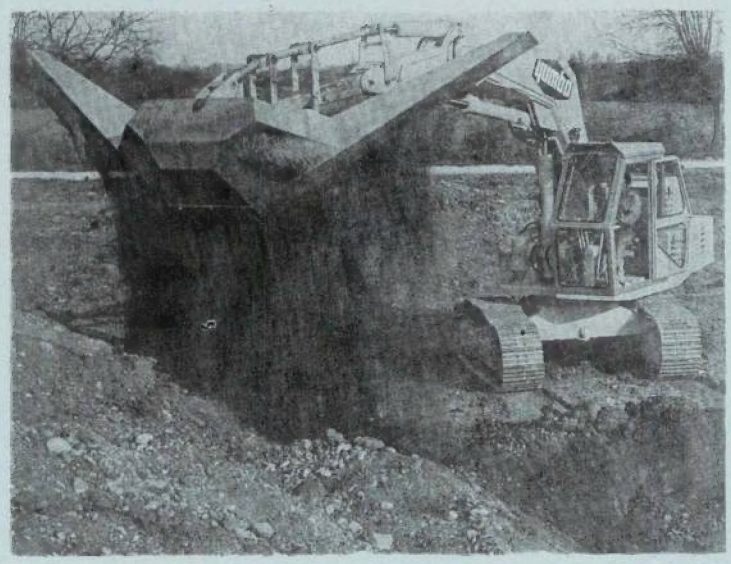
Solicitem prospecto detalhado ou demonstração aos representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8 * TEL. 68 91 12 * LISBOA-2

ESCAVADORAS HIDRÁULICAS
S/RODAS — S/LAGARTAS

— ENTREGAS IMEDIATAS



DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDAL - Guedes & Almeida, Lda.

R. ÁUREA, 181-2.º • LISBOA-2 • TEL. 32 50 80

R. ALFREDO CUNHA, 538 • MATOSINHOS • TEL. 93 45 62

ISOLUX L.DA

ESTUDOS E INSTALAÇÕES ELÉCTRICAS

Porto

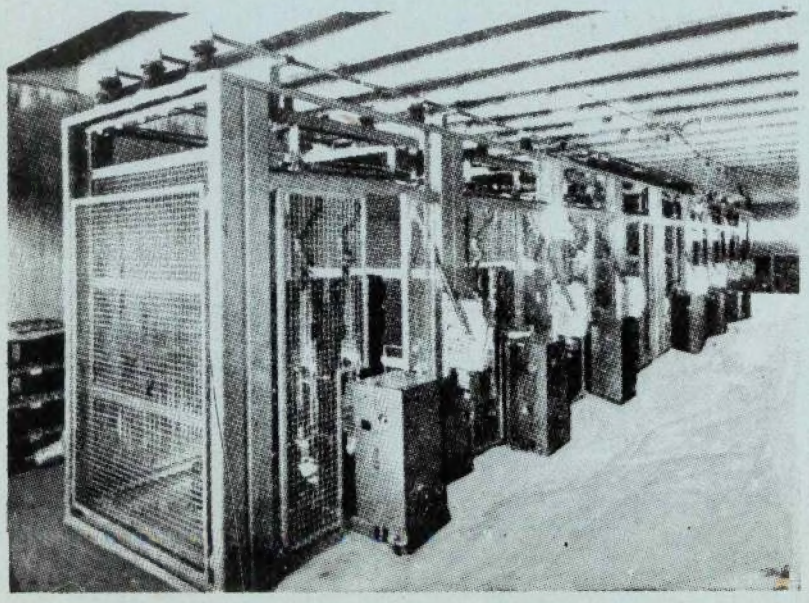
R. Dr. Alfredo Magalhães, 110 - 2º. Dtº.

Tel. 20723

Lisboa

L. Campo Pequeno, 21 - 4 F-[illegible]

Tel. 77 00 30/8/9



CELAS ABERTAS DE ALTA TENSÃO

Projectos e instalações eléctricas de:

Centrais

Subestações

Postos de Transformação

Fábricas

Edifícios públicos

Blocos residenciais

Dimensionamento de Secções de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples de secções rectangulares simplesmente armadas
— Flexão simples de secções rectangulares duplamente armadas
a) com armadura de compressão reduzida
b) com armadura de tracção reduzida
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Compressão simples
— Flexão composta de secções rectangulares
a) com armadura simétrica
b) com armadura de tracção reduzida
c) com armadura de compressão reduzida
— Flexão composta desviada de secções rectangulares
— Flexão composta de secções em T
a) com armadura de tracção reduzida
b) comarmadura de compressão reduzida
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas
— Esforço transverso

Preço 150$00

Dimensionamento de Secções Circulares de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas

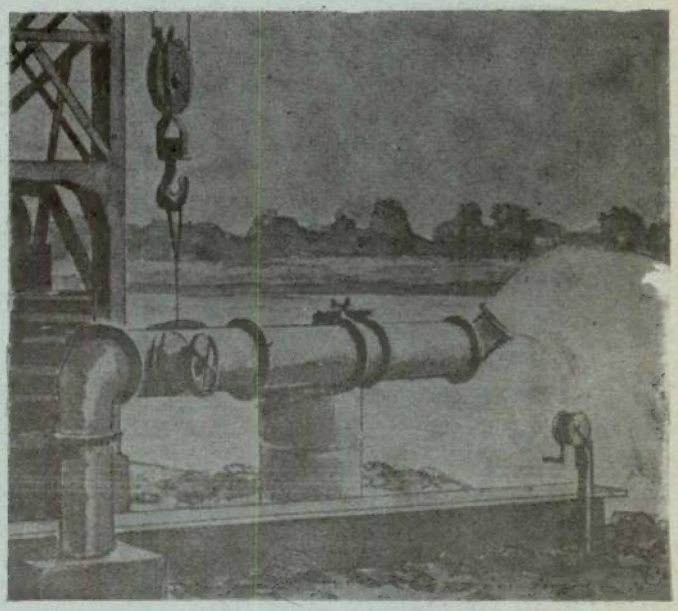
Preço 60$00

Por J. M. MADEIRA COSTA

ENG.º CIVIL

À venda na TÉCNICA e nas LIVRARIAS

Água: eis o que lhe oferecemos!



- Pesquisas e captações de água
- Estudos hidrogeológicos
- Sondagens e Fundações
- Rebaixamento de níveis aquíferos

ACAVACO

R. Rodrigo da Fonseca, 62, r/c-Esq. - Lisboa-1
Tel. 56 11 71/2/3/4

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa

No Norte: **SCIAL** — R. António Feliciano de Castilho, 1126 — Telef. 97 09 32 — Areosa — Porto

SONDAGENS RODIO, LD.

R. S. Bento, 644 - 3.º
LISBOA

PORTO
LUANDA
BEIRA

TELEFONE: 68 80 96

SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ESTACAS
PAREDES CONTÍNUAS
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS

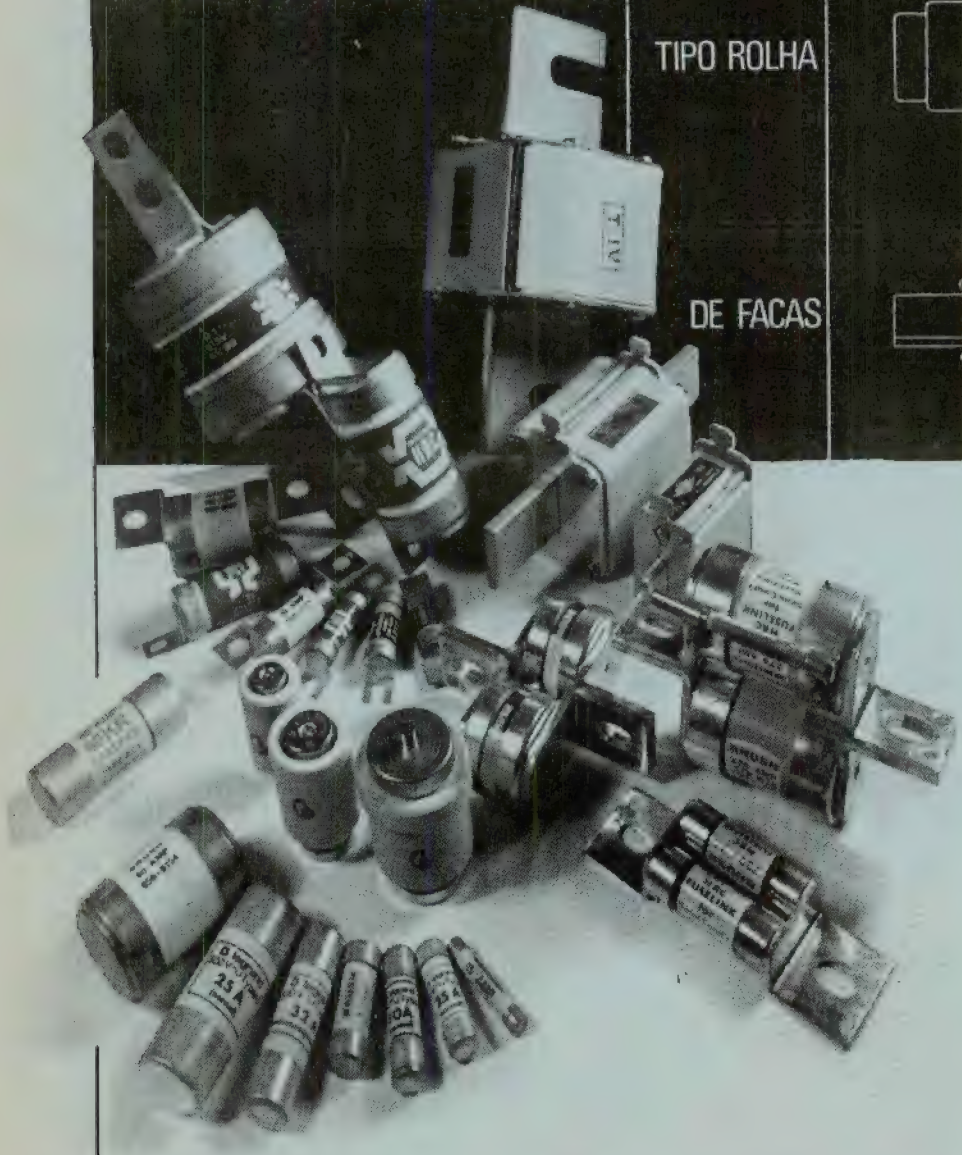
FUSÍVEIS

CILÍNDRICOS

NORMAS BS

TIPO ROLHA

DE FACAS



Permanentemente, grandes quantidades em armazém de fusíveis para corrente alternada e corrente contínua, recarregáveis e não-recarregáveis, de elevado poder de corte, destinados a todos os fins e aplicações, nomeadamente: distribuição, protecção de motores, protecção de semi-condutores, sinalização etc.
Tipos especiais para aviação, tracção e marinha.
Tipos Almirantado e NATO.

JF

J.F. DE AZEVEDO E SILVA & Cª Lda

Trv. Fábrica dos Pentes, 8 * Tel. 654165 * LISBOA

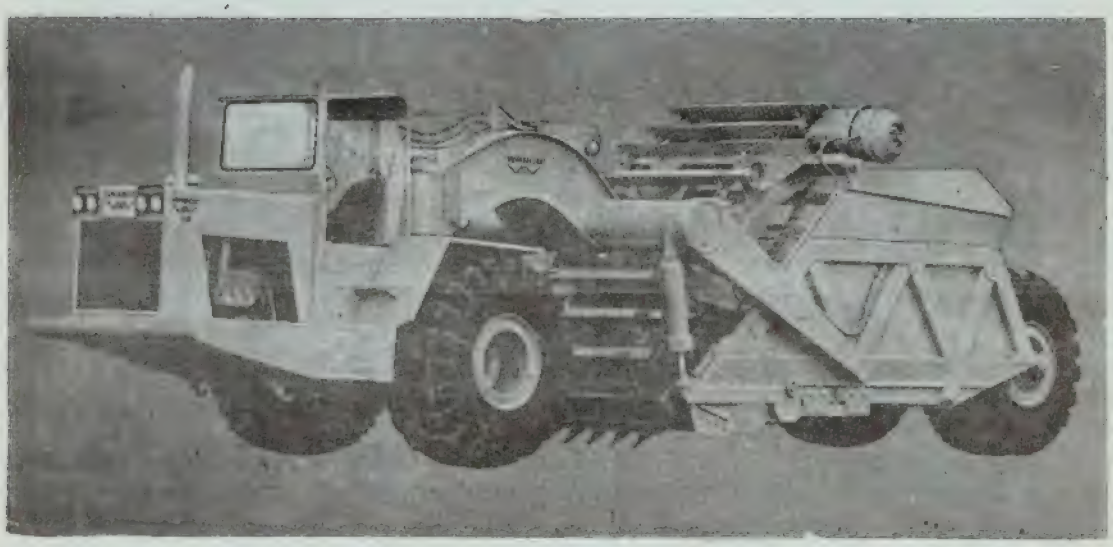
WABCO

An American-Standard Company

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADES ATÉ 34 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

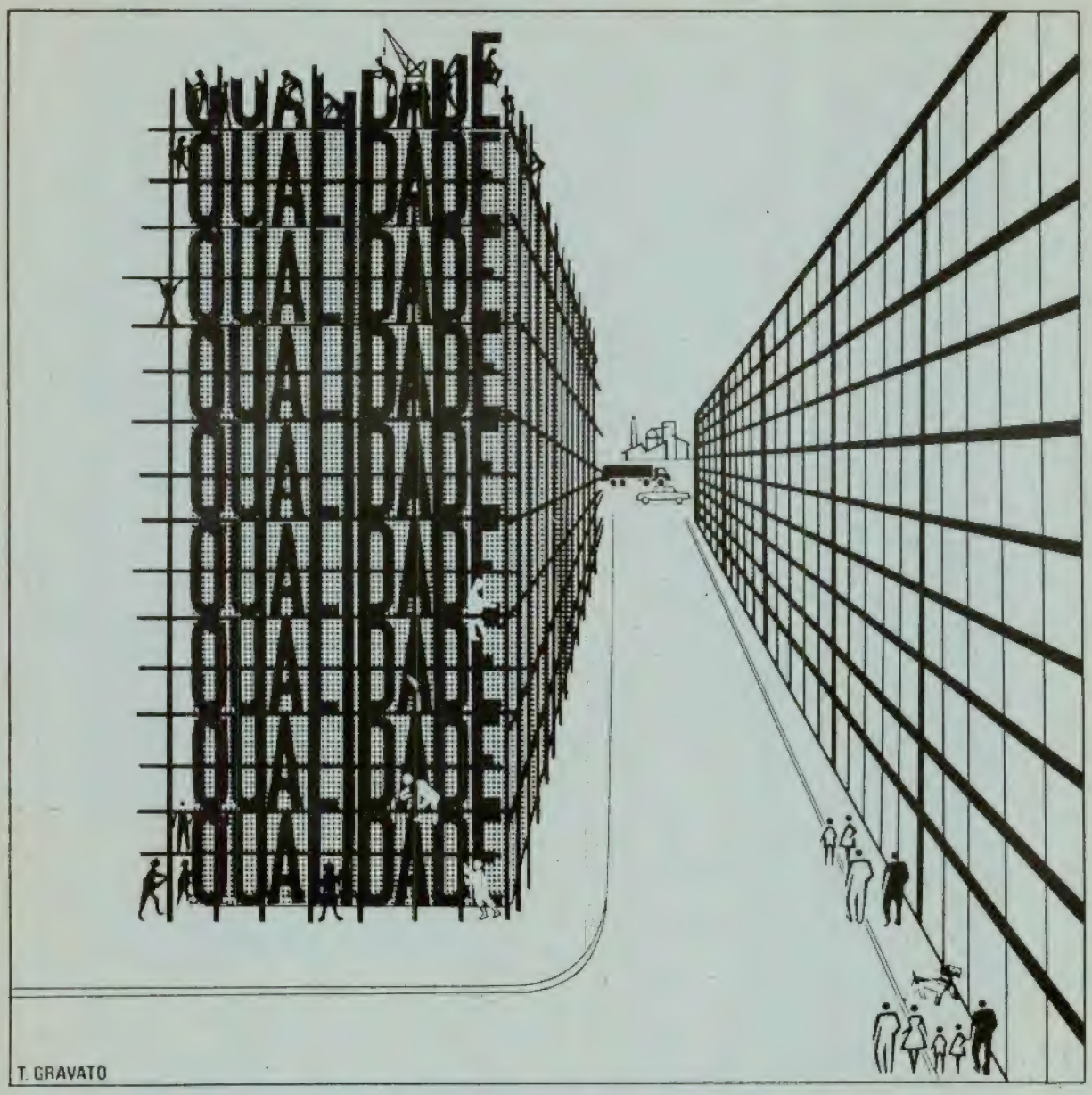


DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDAL - Guedes & Almeida, Lda.

R. ÁUREA, 181-2.º • LISBOA-2 • TEL. 32 50 80

R. ALFREDO CUNHA, 538 • MATOSINHOS • TEL. 93 45 62



O PRESTÍGIO CONSTROI-SE COM QUALIDADE

Não ... não nos dedicamos à construção civil ...
Somos a maior empresa portuguesa dedicada ao fabrico de material de telecomunicação e de electrónica.

A nossa gama de produtos é variadíssima: desde os minúsculos circuitos integrados e transistores até à mais complexa das centrais telefónicas para uso público.

Sim! Todos estes produtos têm algo de comum: — a qualidade, base do prestígio do nosso nome.

Standard Eléctrica **ITT**

os cimentos cimentam o desenvolvimento do país!

A EMPREZA DE CIMENTOS DE DE LEIRIA, S. A. R. L. é, em Portugal, a precursora da moderna indústria cimenteira.
Produzindo cimentos da mais alta qualidade, introduziu, no País, o primeiro forno rotativo e dispõe, actualmente, de uma capacidade de produção de 850.000 toneladas anuais.

A EMPREZA DE CIMENTOS DE LEIRIA, S. A. R. L., com uma actividade diversificada em vários materiais de construção, tem sido a fornecedora de obras de maior importância, como: estradas, pontes, aeroportos, barragens, portos de mar, etc.

A EMPREZA DE CIMENTOS DE DE LEIRIA, S. A. R. L. mantém uma actividade industrial que se identifica com o desenvolvimento da construção do nosso País

EMPREZA DE CIMENTOS DE LEIRIA, S.A.R.L.

Rua Braamcamp, 7 — Lisboa 1 Telefs. 5 91 61/66

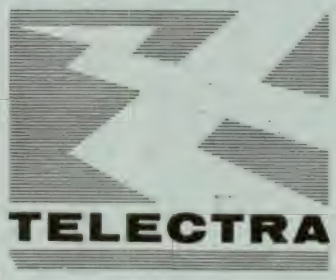
COM UM SORRISO...

...utilize os 4 sistemas diferentes do contador electrónico

HEWLETT hp PACKARD

5300 A

consulte a:



- aparelho portátil
- concepção moderna
- custo moderado

R. RODRIGO DA FONSECA, 103 · LISBOA · TEL. 686072

SIEMENS

Canalizações eléctricas pré-fabricadas de aplicação industrial só com 5 Módulos Básicos (Isoladas ao derredor até 400 A)

O sistema-L 8PL da Siemens é, no mercado europeu, a única canalização eléctrica pré-fabricada de **Polyester reforçado a fibra de vidro** com saídas permutáveis até 400 A.

As vantagens deste Sistema-L capsulado em material isolante saltam à vista:

- Isento de corrosão em Atmosferas agressivas (até "MAK" = máx. concentração no local de trabalho)
- Isolamento de protecção segundo VDE 0660
- Sem manutenção, nenhuma pintura protectora e com uma duração de vida ilimitada
- Tropicalizado, não inflamável e com extinção automática

No sistema-L concentrou-se uma série de possibilidades de aplicação. O resultado torna-se evidente:

- Montagem agradável pelas dimensões e pesos reduzidos
- Sistema modular de aplicação universal
- Elevada liberdade de montagem em prolongamentos e adaptações de serviço
- Projecto simples e económico
- Vantajoso como coluna montante em edifícios
- Mudança segura de fusíveis através das caixas de saída com aferrolhamento na tampa

Existências permanentes em armazém

Se deseja conhecer todas as vantagens entre em contacto com

Sistema-L da Siemens

técnica

NÚMERO 416 OUTUBRO DE 1972 ANO XLVII VOLUME XXXV PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 621.785

TRANSFORMAÇÕES NO REVENIDO DOS AÇOS MARTENSÍTICOS COM 12 % DE CRÓMIO

RUI NUNES CORREIA
Eng.º Químico - Industrial (I. S. T.), M. Met. (Univ. de Sheffield), Assistente Especialista do L. F. E. N., Assistente do I. S. T.

RESUMO

São revistas as reacções de precipitação de carbonetos durante os quatro primeiros estádios do revenido dos aços martensíticos com 12% de crómio. Faz-se também referência ao papel de outros elementos de liga nestas transformações e na ocorrência de um quinto estádio, correspondente à precipitação de um intermetálico.

SUMMARY

The carbide precipitation reactions during the first four stages of tempering in 12% chromium steels are reviewed. Reference is also made to the role of other alloying elements in these transformations and in the occurrence of a fifth stage corresponding to an intermetallic precipitation.

INTRODUÇÃO.

Os aços inoxidáveis martensíticos são susceptíveis de austenitização, produzindo uma estrutura predominantemente martensítica por arrefecimento suficientemente rápido, o que lhes permite conjugar uma razoável resistência à corrosão com a resistência mecânica e a dureza elevadas da estrutura martensítica. A classe dos aços mantensíticos com 12% de crómio engloba dois grupos, consoante o teor de carbono é inferior a 0,15% ou cai entre 0,2 e 0,4%, sendo este segundo grupo mais sensível ao revenido e apresentando maior dureza e menor resistência à corrosão como resultado do maior teor de carbono que possui.

Pretendendo obter-se uma estrutura essencialmente martensítica por arrefecimento desde o domínio da austenite, a temperatura de fim de formação da martensite, Mf, deve estar acima ou perto da temperatura ambiente. Isto implica que a temperatura de início de formação da martensite, M_s, deva cair acima de 200°C, uma vez que o intervalo de transformação martensítica é de pelo menos 150°C [1]; consequentemente, o teor de outros elementos de liga terá de ser limitado, dado que todos em geral baixam M_s. A depressão de M_s para vários elementos de liga é apresentada no quadro I.

1. REVENIDO DOS AÇOS COM 12% DE CRÓMIO SEM ADIÇÃO DE OUTROS ELEMENTOS DE LIGA.

1.1 — *Estado temperado*

Nestes aços o arrefecimento ao ar é suficiente para assegurar uma estrutura martensítica, mesmo em secções relativamente espessas, dado que a adição de crómio retarda notàvelmente a taxa de difusão, dificultando todas as transformações tèrmicamente activadas.

O crómio baixa acentuadamente a energia de falha de empilhamento da austenite [2,3] o que, aliado às baixas temperaturas de transformação martensítica nos aços ligados, parece estar na origem do aparecimento de um tipo de martensite em placas [4] «lath martensite») apresentando uma elevada densidade de deslocamentos mas não geminação interna. Esta martensite (ξ) forma-se inicialmente em agulhas cuja direcção de crescimento é $\langle 110 \rangle_\gamma$; com o progresso da precipitação as agulhas degeneram em placas tendo $\{112\}_\gamma$ como plano de hábito (embora a direcção de crescimento se mantenha) e obedecendo às relações de orientação de KURDJUMOV - SACHS (quadro II).

Para o mesmo teor de carbono a dureza da martensite temperada é maior nos aços de crómio do que nos de carbono, não só por efeito de endurecimento por

solução sólida mas também porque a depressão de M_s, provocada pela adição de crómio, diminui o efeito de auto-revenido, fazendo com que o carbono permaneça em solução e seja mais efectivo no seu efeito de endurecimento.

1.2 — *Revenido a baixa temperatura (100 - 500°C)*

Primeira fase — Supondo que não ocorre auto-revenido, a martensite decompõe-se, tal como nos aços de carbono, dando uma precipitação fina, tipo Widmanstätten, de ε — carboneto, $Fe_{2-3}C$, cuja estrutura é hexagonal compacta e que parece ser coerente com a matriz [5]. ε é uma fase de Laves, instável, isoestrutural com outros carbonetos e nitretos da fórmula M_2X em que M é um metal de transição (V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Nb, Mo, Ta, W) e X é carbono ou azoto.

Este carboneto precipita até 200°C nos aços de carbono, mas o crómio parece estabilizar este precipitado até 300°C [5] por substituição de átomos de ferro [6]; no entanto, o teor de crómio em ε não poderá estar em excesso em relação à composição do aço, dada a baixa difusividade do crómio a estas temperaturas de revenido [7].

A precipitação de ε produz frequentemente um ligeiro acréscimo de dureza [5] que corresponde à chamada primeira fase do revenido. A ferrite resultante é sobressaturada, isto é, os cristais de martensite decomposta contêm ainda uma quantidade apreciável de carbono em solução, além das partículas de ε uniformemente distribuídas; porém, como resultado do empobrecimento da martensite em carbono solúvel, a sua razão axial decresce com esta precipitação.

Segunda fase — O aumento dos parâmetros de revenido (tempo e/ou temperatura) produz a decomposição do austenite eventualmente retida na têmpera, com a precipitação de um carboneto ainda não identificado mas sugerido como sendo Fe_5C_2 [6].

Terceira fase — A precipitação do carboneto ortorrômbico cementite no interior das agulhas de martensite ocorre com o prosseguimento do revenido. A cementite é um carboneto com a fórmula M_3C em que M = Fe, Cr, Mn, . . . ; o teor de elementos de liga nesta fase aumenta linearmente com a percentagem dos mesmos elementos no aço e, em particular, o crómio pode substituir até 18% de ferro. As relações de orientação de BAGARYATSKII [6] são obedecidas (quadro 2) e o plano de hábito de M_3C é diferente do de ε, o que leva a admitir que a transformação ε → M_3C não é directa mas que, pelo contrário, M_3C é nucleado separadamente enquanto ε se dissolve [5]. M_3C tende a coalescer e esferoidizar com o decorrer do revenido (processo que, nos aços de carbono, provoca um decréscimo de dureza acima dos 350°C); no entanto, os elementos de liga, particularmente o crómio e o silício, retardam este crescimento, admitindo-se que o crómio em solução sólida na ferrite revenida dificulta a dissolução de cementite (necessária para que haja coalescência) por combinação com lacunas e por uma possível influência sobre a taxa de difusão do carbono às temperaturas de revenido mais baixas [5].

1.3 — *Revenido de 500 a 800°C*

Quarta fase — Nesta fase dá-se a conversão da cementite num carboneto de crómio. Uma vez que a nucleação e o crescimento deste carboneto são controlados pela difusão de crómio, que é um elemento lento, esta conversão não tem lugar em tempos curtos (da ordem de uma hora ou menos) abaixo de 500°C. A nucleação do novo carboneto dar-se-à nos pontos em que houver concentração local do elemento carbonetogéneo (crómio); como o carbono se difunde para o local de nucleação mais fàcilmente do que o crómio, o tipo de carboneto que tende a formar-se em primeiro lugar é aquele capaz de acomodar maiores teores de outros elementos metálicos. Uma vez que o carboneto ortorrômbico [8] M_7C_3 (com M = Cr, Fe) parece poder dissolver mais ferro do que o carboneto estável $M_{23}C_6$ [9], ele precipitará primeiramente, embora o seu teor de crómio tenda a aumentar durante o revenido [9].

O aparecimento de M_7C_3 está associado, nos aços com mais de 10 - 12% de crómio, com um máximo de dureza ("endurecimento secundário") (ver figura 1). Este endurecimento não é detectado em aços de mais baixo crómio presumìvelmente porque nestes a transformação $M_3C \rightarrow M_7C_3$ é na sua maioria "in situ", enquanto que nos aços com 10 - 12% de crómio essa transformação se dá predominantemente por nucleação separada de M_7C_3 enquanto que a cementite se dissolve [10], o que leva à obtenção de um máximo de dureza quando as partículas frescas de M_7C_3 atingem uma dimensão e espaçamento críticos.

Um efeito de coerência poderá também explicar este endurecimento secundário. É provável que as partículas de cementite ao dissolverem-se deixem zonas ricas em crómio [10, 11] nas quais M_7C_3 possa nuclear, de preferência em deslocamentos resultantes da transformação martensítica. A hipótese de coerência no início da precipitação de M_7C_3 é apoiada pelo rápido decréscimo de dureza que se segue ao endurecimento secundário: parece, com efeito, que a simples coalescência de M_7C_3 não explica este rápido amaciamento, enquanto que a perda de coerência pode justificá-lo [12]. É mesmo provável que a relação axial de M_7C_3 não lhe permita permanecer coerente com a ferrite durante o tempo suficiente para produzir uma dispersão com uma densidade e um diâmetro de partícula críticos [5].

O endurecimento secundário não é marcado nos aços de crómio, o que pode dever-se quer à semelhança de raios atómicos do ferro e do crómio, conduzindo a pequenas deformações locais na formação de zonas [10], quer a um crescimento ràpido de M_7C_3 uma vez que o crómio se difunde mais fàcilmente na ferrite do que outros carbonetogéneos.

Nas primeiras fases da precipitação M_7C_3 apresenta-se muito fino (diâmetro menor que 100 A), tornado-se claramente visível ao microscópio electrónico na condição de sobre-envelhecido e permitindo então a obtenção de um difractograma completo.

Este sobre-envelhecimento dá-se acima de 500°C para tempos da ordem de uma hora e é acompanhado

pela formação do carboneto mais estável $M_{23}C_6$ (M = Fe, Cr), cuja precipitação começa nos limites dos grãos aciculares da ferrite e nos antigos limites de grão da austenite. Para partículas nos limites de grão da ferrite são obedecidas as relações de orientação indicadas no quadro II. $M_{23}C_6$ tem estrutura cúbica complexa e o seu conteúdo de crómio atinge 57% num aço com 12% de crómio e 0,3% de carbono, aumentando com a razão Cr/C [7].

A transformação $M_7C_3 \rightarrow M_{23}C_6$ foi considerada como ocorrendo "in situ" [12], por nucleação separada [13] ou ainda por uma interacção de M_7C_3 com a matriz adjacente [9]. O primeiro mecanismo foi o inicialmente proposto, uma vez que a formação de $M_{23}C_6$ (que requer maiores teores de elementos de liga) seria difícil no seio duma matriz empobrecida nesses elementos pela prévia precipitação de M_7C_3 e que, por maioria de razão, essa precipitação seria ainda mais difícil na interface M_7C_3 / matriz, onde o conteudo de elementos de liga seria mínimo. Outra razão para a adopção deste mecanismo baseou-se na semelhança de morfologia entre M_7C_3 e $M_{23}C_6$. No entanto , um estudo detalhado [14] conduziu à conclusão de que $M_{23}C_6$ deveria precipitar simultâneamente com M_7C_3 no início do revenido, quando o conteúdo de crómio na matriz é máximo, ocorrendo a transição $M_7C_3 \rightarrow M_{23}C_6$ por crescimento competitivo de um número fixo de núcleos de $M_{23}C_6$. A taxa de transformação $M_7C_3 \rightarrow M_{23}C_6$ seria controlada pelo número relativo de núcleos formados nos instantes iniciais; pelas estabilidades relativas dos dois carbonetos na matriz empobrecida em crómio e pela densidade da dispersão do precipitado. Ainda que o seu teor final de crómio seja superior ao de $M_{23}C_6$, M_7C_3 pode precipitar com um teor inicial de crómio inferior ao de $M_{23}C_6$; consequentemente em espécimes revenidos a temperaturas inferiores a 700°C (para as quais a taxa de difusão não é suficientemente elevada para permitir a nucleação competitiva de $M_{23}C_6$ e M_7C_3) forma-se um grande número de núcleos de M_7C_3, enquanto que a formação de $M_{23}C_6$ é muito lenta. No entanto, uva vez nucleado, $M_{23}C_6$ pode crescer numa matriz mais pobre em crómio do que M_7C_3, sendo a sua taxa de crescimento influenciada pela disponibilidade de crómio na matriz e de crómio e carbono provenientes de M_7C_3 à medida que este se dissolve. A dissolução de M_7C_3 pode no entanto ser afectada pela presença de elementos de liga (por exemplo, o vanádio estabiliza M_7C_3 para mais baixos teores de crómio na matriz).

2. EFEITO DE ELEMENTOS DE LIGA

Os elementos de liga aumentam a resistência do aço ao revenido quer por estabilização de M_2X, dilatando o intervalo de temperatura em que este precipitado é estável, quer por estabilização da dispersão de M_7C_3 em partículas finas, quer pela formação de carbonetos de elementos de liga (W_2C, Mo_2C), quer ainda pela precipitação de um composto intermetálico a temperaturas superiores a 500°C.

M_2X é estabilizado em relação a M_7C_3 por adição de elementos de liga tais como Mo, V, Nb e pode constituir a maior parte do precipitado responsável pelo endurecimento secundário. Por outro lado, M_2X pode causar um acréscimo de dureza no endurecimento secundário, uma vez que a sua estrutura pode aceitar teores apreciáveis de muitos elementos de liga [1]. O endurecimento secundário pode ser reforçado por dilatatação dos parâmetros da rede de M_2X em relação aos da matriz [1]. Para elementos não carbonetogéneos (que não podem portanto afectar o precipitado M_2X), solúveis na matriz (Si, Al, Ni, Co, Cu, Mn), é de esperar que apenas o silício tenha efeito apreciável, uma vez que decresce o parâmetro reticular da ferrite. Os elementos carbonetogéneos dilatam os parâmetros reticulares de M_2X pela ordem crescente V, Mo, W, Ti, Nb, sendo, pois de esperar que provoquem pela mesma ordem, um crescente incremento do endurecimento secundário.

A presença de traços de elementos, carbonetogéneos ou não (Nb, Au, Ni, Al, Pd) pode causar um sensível acréscimo do máximo de dureza, possìvelmente por influenciar a fase de pré-precipitação do carboneto do principal elemento de liga nos aços de crómio ligados [5]. Nos aços de molibdénio, por exemplo, traços de Au, Nb ou Pd provocam grandes distorções que poderão actuar como núcleos de segregação dos átomos de molibdénio para formar zonas na fase de pré-precipitação de Mo_2C, promovendo assim um acréscimo na taxa de nucleação de zonas e, portanto, um acréscimo de dureza secundária. Contudo o efeito considerável dos traços de níquel não pode ser explicado nesta base, uma vez que o seu raio atómico é próximo do do ferro. Os elementos traços aumentam também a dureza no estado de sobre - envelhecimento. No caso de carbonetogéneos isto poderia atribuir-se à nucleação separada de um outro carboneto (por exemplo NbC, que se verifica precipitar entre as agulhas de Mo_2C e prender os deslocamentos [5]); contudo os não carbonetogéneos têm os seus efeitos grandemente reduzidos acima dos 700°C [5].

Um mecanismo de endurecimento que também pode estar presente nos aços de crómio ligados é o que resulta da precipitação de um intermetálico a temperaturas superiores a 500°C (quinta fase do revenido). Um elemento efectivo é o molibdénio, que precipita Fe_2Mo quando em teores superiores a 4%, deslocando o máximo de dureza de cerca de +100°C (ver figura 2). Efeitos semelhante pode obter-se com adições de tungsténio.

As adições de teores elevados de molibdénio ou tungsténio têm de ser compensadas com adições de elementos gamagéneos para evitar a formação de ferrite. O cobalto é a adição usada, de preferência ao níquel, uma vez que, ao contrário deste último, não decresce apreciàvelmente a temperatura Ac_1 de transformação ferrite-austenite. A informação experimental disponível indica que o cobalto não entra no intermetálico [15] e não forma carbonetos; o seu efeito é o de provocar endurecimento por solução sólida, de intensificar as reacções de envelhecimento por estabilização dos deslocamentos onde se podem nuclear precipitados (por

abaixamento da energia de falha de empilhamento da matriz), e, para teores elevados, de provocar novo endurecimento por uma possível ordenação da matriz com a formação de uma fase Fe_3Co [16].

3. CONCLUSÃO

As reacções de revenido dos aços martensíticos com 12% de crómio podem esquematizar-se do seguinte modo:

$$\alpha' \rightarrow \alpha' \text{decomp} + M_2X \rightarrow \alpha + Fe_3C \rightarrow \alpha + M_7C_3 \rightarrow \alpha + M_{23}C_6$$

A adição de elementos de liga carbonetogéneos tende a estabilizar M_2X pela formação de um carboneto desses elementos ou por simples dissolução na rede do Fe_2X, com a eventual nucleação separada de outro carboneto e a formação de um intermetálico em face mais adiantada:

$$\alpha' \rightarrow \begin{cases} \alpha' \text{decomp} + M_2X \rightarrow \alpha + Fe_3C \rightarrow \alpha + M_7C_3 \rightarrow \alpha + M_{23}C_6 \\ \alpha + M_2X + \underset{(TiC,\ NbC)}{\text{outro carboneto}} + \underset{(Fe_2Mo,\ Fe_2W)}{\text{intermetálico}} \end{cases}$$

QUADRO I

Depressão na temperatura M_s para vários elementos de liga [1].

Elemento	C	Mn	Ni	Cr	Mo	W	Si
ΔM_s (°C) / 1% de elemento	− 474	− 33	− 17	− 17	− 21	− 11	− 11

QUADRO II

Planos de hábito, direcções de crescimento e relações de orientação para as fases intervenientes nas transformações de revenido dos aços martensíticos com 12% de crómio (α = ferrite).

Fase	Plano de hábito	Direcção de crescimento	Relações de orientação	Referências
Mantensite α'	$\{112\}_\gamma$	$\langle 110 \rangle_\gamma$	$\{011\}_{\alpha'} \parallel \{111\}_\gamma$ $\langle 111 \rangle_{\alpha'} \parallel \langle 110 \rangle_\gamma$	[17,18]
Fe_xC (ε)	$\sim \{100\}_{\alpha'}$	$[11\bar{2}0]_\varepsilon$	$(0001)_\varepsilon \parallel (011)_{\alpha'}$ $(10\bar{1}1)_\varepsilon \parallel (101)_{\alpha'}$	[5,6]
M_3C	$\{110\}_{\alpha'}$ ou $\{112\}_{\alpha'}$	$[111]_{\alpha'} \parallel [010]\ M_3C$	$(001)_{M_3C} \parallel (211)_{\alpha'}$ $[001]_{M_3C} \parallel [0\bar{1}1]_{\alpha'}$ $[100]_{M_3C} \parallel [\bar{1}\bar{1}1]_{\alpha'}$	[9]
M_7C_3	$(112)_\alpha$			[10]
$M_{23}C_6$			$\{111\}_{M_{23}C_6} \parallel \{1\bar{1}0\}_\alpha$ com $\{1\bar{1}0\}_{M_{23}C_6} \parallel \langle 011 \rangle_\alpha$ ou $\langle 0\bar{1}1 \rangle_{M_{23}C_6} \parallel \langle 111 \rangle_\alpha$	[8]

AGRADECIMENTO

Este artigo é publicado com autorização do Laboratório de Física e Engenharia Nucleares.

O autor agradece à Comissão INVOTAN a bolsa concedida para frequentar, na Universidade de Sheffield (U. K.), um curso de post-graduação de que fez parte a defesa de uma dissertação em que este artigo é baseado.

BIBLIOGRAFIA

[1] — K. J. IRVINE, D. J. CROWE, F. B. PICKERING, J. I. S. I., *195* (1960), 386.

[2] — H. M. OTTE — Acta Met., *5* (1957), 614.

[3] — H. M. OTTE — Acta Met., *2* (1954), 349.

[4] — J. NUTTING — J. I. S. I., *207* (1969), 872.

[5] — R. W. K. HONEYCOMBE — I. S. I. Sp. Report *86* (1964), 1.

[6] — S. NAGAKURA — Trans. I. S. I. J., *8* (1968), 265.
[7] — K. KUO — J. I. S. I., *185* (1957), 297.
[8] — A. HEDE, B. ARONSSON — J. I. S. I., *201* (1969), 1241.
[9] — S. W. K. SHAW, A. G. QUARRELL — J. I. S. I., *185* (1957), 10.
[10] — S. R. KEOWN — Comunicação apresentada na Universidade de Birmingham, 1964.
[11] — F. B. PICKERING — I. S. I. Sp. Report *64* (1959), 23.
[12] — A. K. SEAL, R. W. K. HONEYCOMBE — J. I. S. I., *188* (1958), 9.
[13] — B. A. BILBY, F. B. PICKERING — I. S. I. Sp. Report *64* (1959), 313.
[14] — J. BEECH, D. H. WARRINGTON — J. I. S. I., *204* (1966), 460.
[15] — K. J. IRVINE — I. S. I. Sp. Report *95* (1966), 37.
[16] — E. DIDERRICH, D. COUTSOURADIS, L. HABRAKEN — Mém. Scient. Rév. Métall., *61* (1964), 655.
[17] — T. BELL em «Martensite, fundamentals and technology» (Longman, 1970).
[18] — P. M. KELLY — I. S. I. Sp. Report 86 (1964), 146.
[19] — K. J. IRVINE, F. B. PICKERING — I. S. I., Sp. Report *86* (1964), 34.

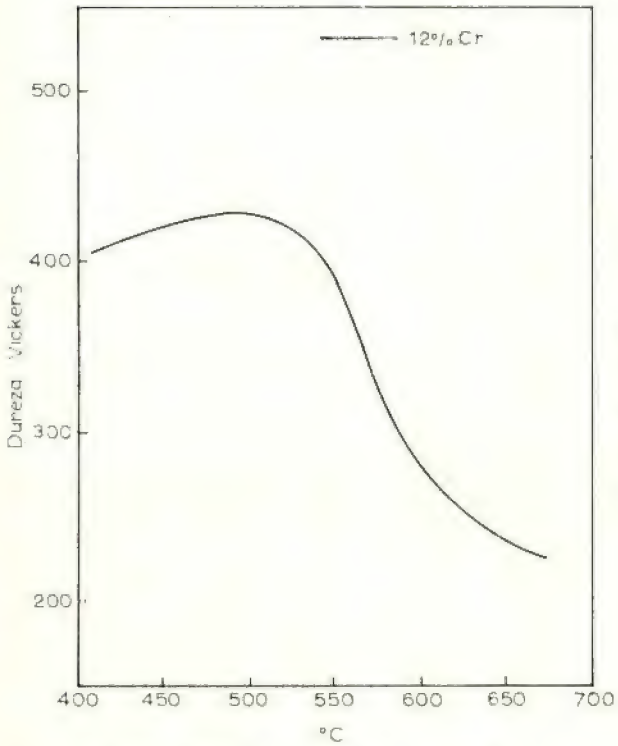


Fig. 1 — Dureza Vickers de um aço com 12% Cr, revenido durante 1 hora, em função da temperatura de revenido. [19].

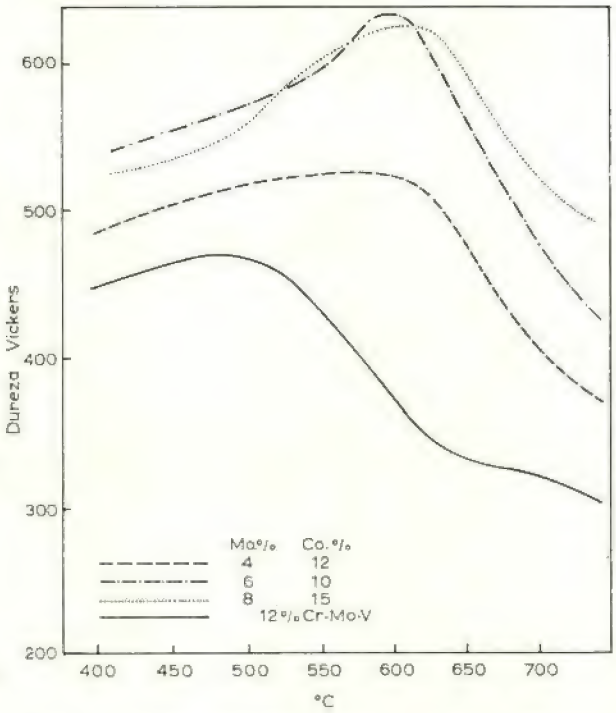


Fig. 2 — Dureza Vickers de aços com 12% Cr e diferentes teores de Mo, revenidos durante 1 hora, em funcão da temperatura de revenido. [19].

Publicidade com critério.

Anuncie na

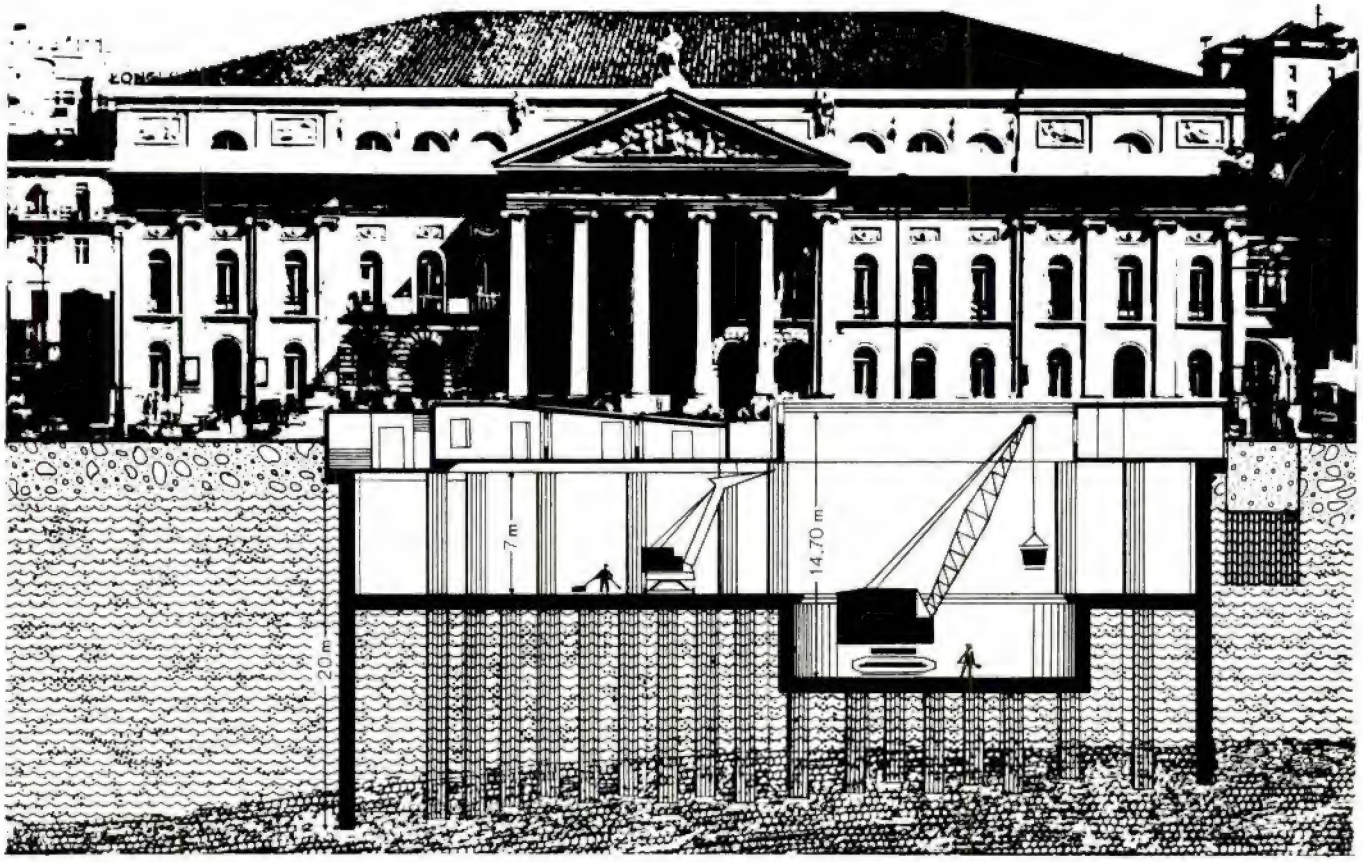
técnica REVISTA DE ENGENHARIA

MOP · DGEMN
gabinete da reconstrução do

TEATRO NACIONAL D. MARIA II

obras no subsolo
paredes moldadas no terreno
20 metros de profundidade

mira-118



estruturas executadas por

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, S.A.R.L.

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

MONTEPIO DE MOÇAMBIQUE

fundações do edifício sede

COM MAIS
DE 30 ANDARES
E 100 METROS DE
ALTURA

EIS A FUNDAÇÃO ESPECIAL PARA O MAIS ALTO ARRANHA-CÉUS DO PAÍS

150 ESTACAS DE BETÃO ARMADO COM 30 METROS DE ALTURA
MOLDADAS NO TERRENO COM 1,20 METROS DE DIÂMETRO, SÃO ENCABEÇADAS NO TOPO POR
10 GIGANTESCAS SAPATAS SUPORTE DE TODA A ESTRUTURA.

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, S.A.R.L.
6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

MIRANDELA & C.ª - 20.000 ex. - 9/71

C. D. U. 621.43

ROTOR E TAXA DE COMPRESSÃO DE MOTORES TIPO WANKEL

DIAMANTINO F. G. DURÃO
Engenheiro Mecânico, Assistente do IST
Div. Termod. Aplic.

RESUMO

O artigo dá continuação a um outro publicado pelo autor, referência 1.

Faz-se a apresentação e discussão dos diferentes critérios possíveis para definir a forma do rotor dos motores tipo Wankel.

São relatadas implicações e meios para ultrapassar as dificuldades matemáticas que aparecem ao usar-se qualquer dos dois critérios considerados mais importantes.

É referida e justificada a importância do parâmetro geométrico adimensional (a + b)/c.

Apresentam-se também as curvas de variação da taxa de compressão em função de (a + b)/c.

SYNOPSIS

Tsis paper is the continuation of onother publication by the author, reference1.

In the paper it is shown and discussed the different criteria to define the shape of rotor of the Wankel type engines.

The implications of the two more important criteria and how to overcome tse mathematical difficulties involved are reported..

The importance of the non-dimensional geometrical parameter (a + b)/c is referred to and justified.

The variation of the compression ratio with (a + b)/c is shown.

1. — Introdução

Este artigo dá continuação a outro publicado anteriormente pelo autor sobre o mesmo assunto, ver referência 1, em que se apresentava a geometria e parâmetros dos motores tipo Wankel, pretendendo-se realçar que este tipo de motores rotativos é resultado das propridades que as curvas peritrocoides possuem. A nomenclatura usada neste artigo é a mesma que então foi seguida.

O problema do critério a seguir para definir o rotor é apresentado, tendo lugar a discussão pormenorizada dos dois critérios que se consideram mais importantes, nomeadamente no que respeita ao modo como ultrapassar algumas dificuldades de ordem matemática a eles inerentes.

A importância do parâmetro geométrico adimensional (a + b)/c é demonstrada a partir da homotetia existente entre os peritrocoides.

A variação da taxa de compressão com a forma do rotor é posta em evidência e demonstra-se que é a forma limite do rotor aquela a que corresponde maior taxa de compressão. A taxa de compressão em função de (a + b)/c, é obtida para os dois critérios considerados e a importância desta relação é devida ao facto da superfície peritrocoidal que o cilindro tem, ficar definida a partir de dois parâmetros geométricos, por exemplo (a + b)/c e c.

2. — Rotor

Referiu-se o facto de a forma do rotor não poder ser qualquer [1]. Do que então foi apresentado conclui-se:

- O rotor é definido por três arestas que têm que existir (deslizar) sempre sobre a superfície do cilindro (peritrocoidal).
- Estas arestas estão à mesma distância de um eixo que é o do rotor.
- Os três planos definidos pelo eixo e por cada uma das arestas fazem entre si ângulos de 120°.
- O centro de gravidade do rotor descreve a circunferência de raio c (excentricidade) e centro em O (centro da peritrocoide).
- As três superfícies que unem as arestas do rotor (faces) devem ser iguais, o que — a não se verificar — se reflectiria na regularidade de funcionamento do motor.
- Da necessidade de simetria apresentada pelos motores,resulta que a superfície que une duas arestas deve ser simétrica em relação ao plano bissector do diedro formado pelas outras duas superfícies.
- Uma das condições limite para a superfície entre duas arestas (face) é que ela seja tal que permita a efectuação pelo rotor de uma rotação completa.

— A condição limite no sentido oposto à anterior resulta da taxa de compressão ter de ser maior que um dado valor mínimo de modo ao motor produzir suficiente potência.

Restrições suplementares vão ser consideradas em seguida de modo a ser definida uma conveniente forma do rotor.

2.1 — Critério da forma limite do rotor

Obedecendo às condições apresentadas anteriormente há uma infinidade de superfícies pelo que é necessário estabelecer um critério de promoção de escolha da forma da superfície. De entre os vários critérios possíveis passa-se a analisar aquele que permite obter a forma limite do rotor. A esta forma corresponderá o menor volume mínimo de câmara.

Mostrou-se em [1] (secção 1.2) a maneira de gerar a peritrocoide a partir do rolamento de uma circunferência (s') sobre outra fixa (s"), conforme figura 1. A s" associava-se o sistema fixo de coordenadas XOY. Associe-se a s' um sistema de eixos coordenados Y'O'X' tal como é apresentado inicialmente na figura 1. Considere-se agora que s' é fixa e que o que rola é a circunsferência s" sobre s', passando portanto XOY a ser o sistema móvel e X'O'Y' o fixo. Como s' está associado ao rotor e s" à peritrocoide, considera-se assim o rotor fixo e a peritrocoide a rodar conforme figura 2. Devido ao facto de r/R (figura 1) ser igual a 2/3, como é deduzido em [1], então os centros da circunferência s" no seu movimento rolante sobre s', vão estar sobre s'" que tem um raio igual a c (excentricidade), como se vê na figura 2. A origem do sistema de coordenadas XOY estará sobre s'".

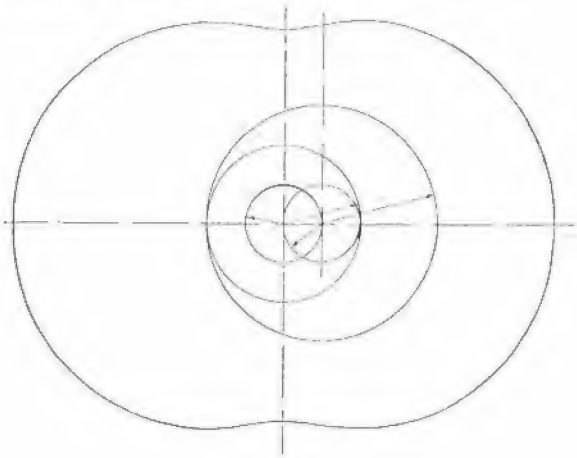


Fig. 1

Em [1], a equação da peritrocoide em XOY foi apresentada como

$$x + iy = (a + b)\, e^{i\alpha} + c\, e^{ik\alpha} \qquad (1)$$

(a, b, k, e α foram então definidos)

Quando XOY roda, geram-se em X'O'Y' sucessivas peritrocoides (ver figura 2) que constituem uma família, a envolvente da qual será a forma limite do rotor. Segundo o critério definido é este o caminho a seguir para obter a forma do rotor.

A relação entre os ângulos δ e ψ, aonde δ é o ângulo definidor da rotação absoluta de XOY em relação a X'O'Y' e ψ é o ângulo definidor da rotação da origem de XOY no sistema X'O'Y', (δ e ψ são apresentados nas figuras 2 e 3) pode fàcilmente obter-se por relações geométricas

$$\psi = 2\,\delta \qquad (2)$$

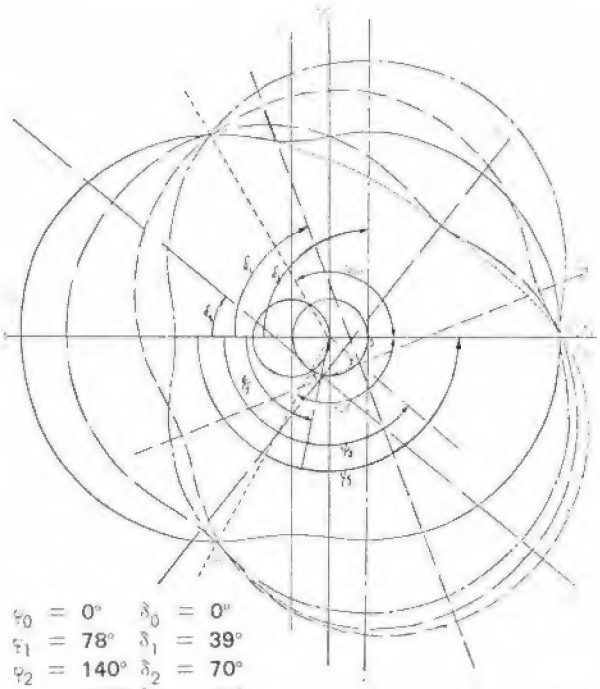
A transformação de coordenadas de XOY em X'O'Y', [2] é:

$$W = -\,c\, e^{2\delta i} + Z\, e^{-\delta i} \qquad (3)$$

aonde

$$W = x' + iy' \qquad (4)$$

$$\text{e } Z = x + iy \qquad (5)$$



$\varphi_0 = 0°$ $\delta_0 = 0°$
$\varphi_1 = 78°$ $\delta_1 = 39°$
$\varphi_2 = 140°$ $\delta_2 = 70°$
$\varphi_3 = 180°$ $\delta_3 = 90°$
a + b = 6 cm
a = 4 cm
b = 2 cm
c = 1 cm

Fig. 2

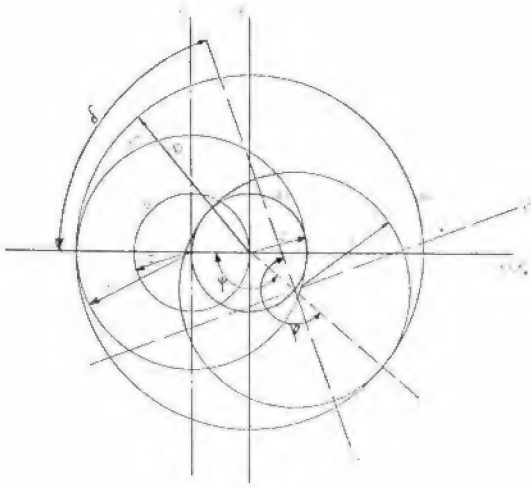


Fig. 3

Como a equação de Z em XOY é a equação (1) conclui-se que

$$x' + iy' = -c\,e^{2\delta i} + (a+b)\,e^{(\alpha-\delta)i} + c\,e^{(3\alpha-\delta)i} \qquad (6)$$

Equação (6) é a equação da peritrocoide f (x,y) definida em XOY quando considerada no plano X'O'Y'.

Ela mostra que cada ponto no plano solidário ao rotor é função de dois parâmetros α e δ aonde α é o parâmetro definidor do ponto no plano XOY e δ define XOY em relação a X'O'Y'.

Para se encontrar a forma limite do rotor tem que se achar a envolvente à família de curvas definidas por (6), correspondendo a eliminar o parâmetro δ a partir do sistema:

$$\begin{cases} x' = -c\cos 2\delta + x\cos\delta + y\,\mathrm{sen}\,\delta \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\delta - c\,\mathrm{sen}\,2\delta + y\cos\delta \\ \dfrac{\partial(x',y')}{\partial(\alpha,\delta)} = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

As duas primeiras equações em (7) correspondem à equação (3).

A solução exacta de (7) é muito trabalhosa e a seguir se referem dois métodos de ultrapassar essa dificuldades de solução, método numérico por aproximações sucessivas e método geométrico, de modo a obter a forma limite do rotor sem a exacta resolução de (7).

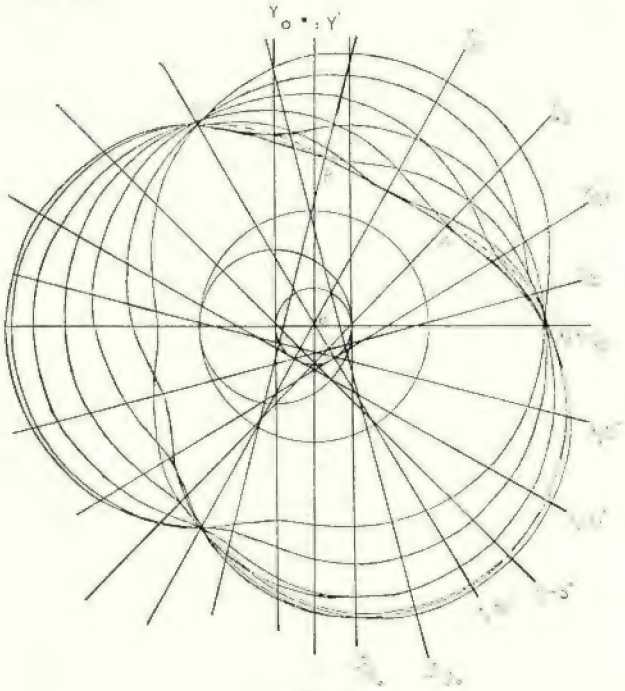


Fig. 4

2.1.1 — Método numérico por aproximações sucessivas

Usando a equação (6), como para cada peritrocoide os valores (a + b) e c são definidos, pode saber-se qual a curva descrita no plano do rotor (rotor fixo) por um ponto qualquer da peritrocoide (definido por um certo ângulo α) quando esta roda. Ter-se-á para cada α uma curva em X'O'Y' e a forma limite do rotor será a envolvente a todas essas curvas. Uma análise cuidada do modo como se efectua a movimentação do rotor dentro do cilindro reduz muito o número de pontos (valores de α) a considerar para se ter a forma do rotor. Na figura 4 (efectuada com valores de a + b = 6 cm e c = 1 cm), pode-se verificar que a curva limite do rotor é num troço bastante grande (troço AB) igual à curva gerada pelo ponto da peritrocoide definido por α igual a 90°.

A curva correspondente aos pontos definidos por $\alpha = 90°$ é obtenível de (6) resultando

$$\begin{cases} x' = -c\cos 2\delta + (a+b)\,\mathrm{sen}\,\delta - c\,\mathrm{sen}\,\delta \\ y' = -c\,\mathrm{sen}\,2\delta + (a+b)\cos\delta - c\cos\delta \end{cases} \qquad (8)$$

que é portanto a curva limite do rotor enquanto este for definido pelo ponto considerado.

Fazendo a aplicação para a peritrocoide apresentada na figura 4 resulta que a curva translação do ponto da peritrocoide corresponde a $\alpha = 90°$ é

$$\begin{cases} x' = -c\cos 2\delta + 5\,\mathrm{sen}\,\delta \\ y' = -c\,\mathrm{sen}\,2\delta + 5\cos\delta \end{cases} \qquad (9)$$

A partir de (9) traçou-se a curva correspondente, figura 5, e nela se marcou a zona que coincide com a forma limite do rotor.

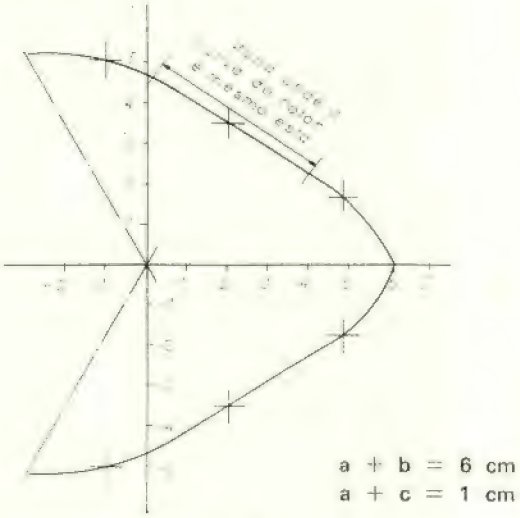


Fig. 5

Fàcilmente se pode concluir que quanto maior for (a + b) para o mesmo valor de c menor é o troço do rotor definido pelo ponto $\alpha = 90°$.

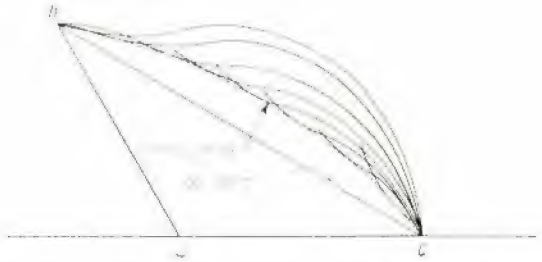
Apresentou-se a ligação entre a forma limite do rotor e a curva descrita pelos pontos da peritrocoide definidos por um certo valor de λ; para traçar a total forma limite do rotor é preciso repetir o indicado para valores de α compreendidos entre 90° e 120° e obter a envolvente interior a essas curvas. Isto pode ser programado de modo a este problema ser resolvido numèricamente com o auxílio do computador.

2.1.2 — Método geométrico

Método menos preciso que o anterior mas que ràpidamente pode ser usado consistindo em:

– tendo desenhado a peritrocoide, desenhe-se o triângulo DO'C (figura 4) e faça-se deslizar este triângulo sobre a peritrocoide de modo a apoiar sempre os vértices C e D sobre ela, desenhando os troços da peritrocoide que vão ficando entre esses vértices.

– Traçam-se um número razoável de troços pondo portanto o triângulo em sucessivas posições sobre a peritrocoide e uma face da forma limite do rotor obtem-se pela envolvente a todos os troços desta maneira desenhados na folha do triângulo. O resultado de uso deste processo é apresentado na figura 6 que foi feita para a peritrocoide da figura 4.



a + b = 6 cm
c = 1 cm
a = 4 cm

Fig. 6

2.2 — Forma limite do rotor e taxa de compressão

Chamando taxa de compressão à razão entre o volume de câmara máximo e mínimo,

$$\varepsilon = \frac{V_M}{V_m} \qquad (10)$$

Sejam V_{M1} e V_{m1} os volumes máximos e mínimos quando a forma do rotor for a limite , obtenível pelo critério apresentado em 2.1, à qual corresponde a taxa de compressão $\varepsilon_1 = V_{M1} / V_{m1}$ e V_{M2} e V_{m2} quando a forma do rotor não for a limite sendo $\varepsilon_2 = V_{M2} / V_{m2}$. A diferença de volumes do rotor (ou da câmara) entre as duas diferentes situações chama-se v, sendo assim $V_{M2} = V_{M1} + v$ e $V_{m2} = V_{m1} + v$ como se pode ver pela figura 7.

Como $V_{M1} > V_{m1}$

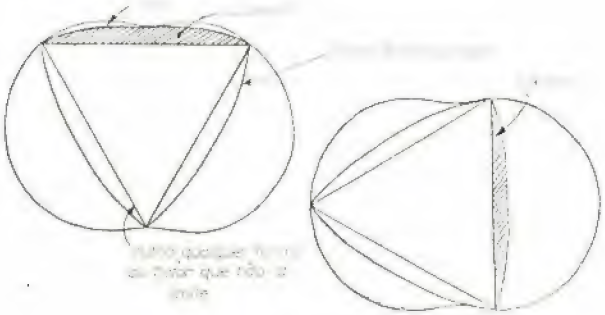


Fig. 7

será

$$v V_{M1} + V_{M1} V_{m1} > v V_{M1} + V_{M1} V_{m1}$$

donde

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$$

Pode-se concluir assim que a forma limite do rotor garante a maior taxa de compressão possível para rotores com a mesma distância entre as três arestas.

2.3 — Critério a usar para a escolha da forma do rotor

Em 2.1 apresentou-se o critério de definir a forma do rotor como sendo a sua forma limite.

Muitos outros critérios porém podiam ser enunciados como por por exemplo o definir a forma do rotor à qual correspondesse uma dada taxa de compressão, ou que tecnològicamente fosse mais fácil de executar (um arco de circunferência por exemplo), ou que permitisse uma melhor combustão, etc. O critério da forma limite do rotor foi o usado para base da forma do rotor em muitos trabalhos, ver referências 2, 3, 4 e 5.

Em todos eles porém alterações foram feitas no sentido de diminuir o desgaste e facilitar a combustão.

As modificações consideradas são:

1.° — Forma do rotor tal que permite sempre a existência de uma folga, ainda que pequena, entre o cilindro e o rotor;

2.° — Criação de uma câmara suplementar no interior da face do rotor como se vê na figura 8.

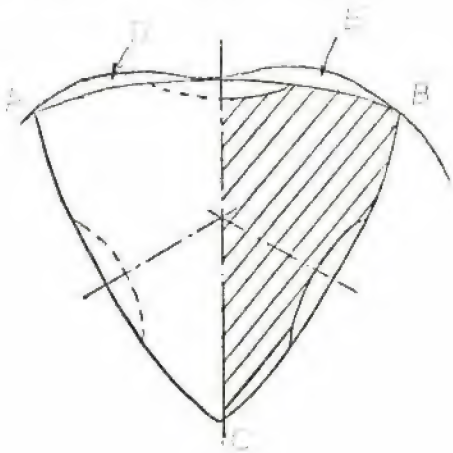


Fig. 8

A primeira alteração é devida ao facto de não se querer que as faces laterais do rotor raspem no cilindro, isto é, só nas arestas laterais (A, B e C da figura 8) é que o contacto deve existir. Ora se a forma do rotor adaptada fosse a forma limite, verificar-se-iam pontos de tangência. Outra razão para existência desta folga reside no facto de a mistura combustível quando o rotor estivesse na posição da figura 8, na combustão comportar-se-ia como estando em duas câmaras independentes (D e E), não sendo isso o pretendido.

O problema da combustão apresentado anteriormente justifica a segunda alteração que é necessária para aumentar a facilidade de propagação da combustão. Na figura 8 vê-se que se forma do rotor fosse a limite, quando a mistura se encontrasse para explodir estaria demasiadamente espalhada numa zona estreita e comprida que nada facilitaria a combustão; assim a abertura da câmara suplementar faz localizar a mistura facilitando a queima. Alguns dos problemas da combustão neste tipo de motores e a acção da câmara suplementar estão focados por Awsdale [3] e Froede [4]. Aparece agora o problema das dimensões, forma e volume que a câmara deve ter. Numerosas formas, ver [3] e [4] têm sido experimentadas mas as diferenças de perfomances não são tão pronunciadas que permitam chegar a conclusões definitivas [3] entretanto em motores já existentes tem havido evolução no sentido de aumento de câmara no sentido lateral como é apresentado na figura 9. O volume suplementar a usar, segundo referências 3 e 6, é aproximadamente igual ao volume mínimo entre o rotor e cilindro se a câmara não existisse. A profundidade da câmara é limitada por aspectos de possibidades de dimensionamento, de construção do rotor e de propagação da explosão. A necessidade de criação de uma câmara suplemontar para facilitar a regularizar a explosão, com a correspondente diminuição da taxa de compressão, explica a sua forma limite (desde que não haja tangencialidades com o cilindro exceptuando as arestas), pois que ela é a que garante uma taxa de compressão maior sendo a

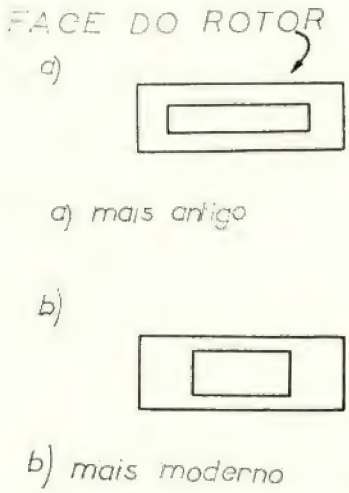


Fig. 9

que apresenta um volume mínimo menor, dando nestas circunstâncias, para a mesma taxa de compressão final um volume maior de câmara adicional. Isto é um resultado do dito em 2.2. O uso da forma limite do rotor é a que permite uma concentração espacial da mistura a arder, sendo portanto a que garnte uma queima mais fácil e perfeita do combustível.

Assim se apresentou e justificou qual o critério a seguir para desenho da forma do rotor.

Como em 2.1 o desenho desta forma pode ser calculado por métodos numéricos ou geométricos.

2.3.1 — Método numérico de encontrar a forma do rotor

As equações (6) e (8) dão a forma limite do rotor, porém o critério definitivo apresentado em 2.3 para a obter, prevê a existência de uma folga entre o rotor e o cilindro. Assim ir-se-á procurar a equação definidora do rotor segundo o novo critério.

Reportando-se à figura 10, mostrou-se em [1], que o ponto P (0, a + b + c), no sistema XOY ao rodar em torno de O com movimento peritrocoidal gera a curva de dois lóbulos cuja equação é

$$Z = (a + b)\, e^{i\alpha} + c\, e^{i3\alpha} \qquad (11)$$

Esta equação resulta da equação (1) para k = 3.

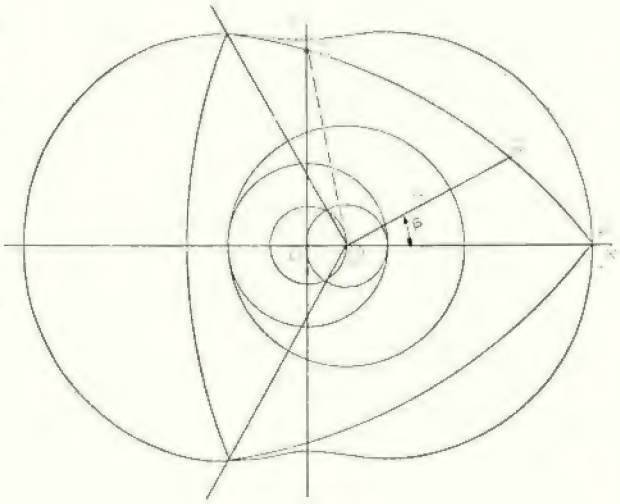


Fig. 10

Um ponto genérico Q sobre o rotor (figura 10) pode ser definido por

$$\overline{OQ} = \overline{OO'} + \overline{O'Q} = c\, e^{i3\alpha} + H\, e^{i\alpha(+\beta)} \qquad (12)$$

onde

- 0 = origem do sistema de coordenadas XOY ligado ao cilindro.
- 0' = origem do sistema de coordenadas móvel ligado ao rotor.
- 3α = ângulo posicional do vector $\overline{OO'}$
- α = ângulo posicional do vector $\overline{O'P}$ (vector que gera a peritrocoide).
- H = módulo do vector $\overline{O'Q}$
- β = ângulo entre $\overline{O'Q}$ e $\overline{O'P}$.

Está-se assim definindo o vector $\overline{OQ}$ a partir da posição do vector $\overline{OP}$. Considera-se o ponto P (vértice do rotor) podendo estar em qualquer posição (definida pelo ângulo α) e a partir daí pode-se referenciar um qualquer outro ponto Q sobre a curva do rotor, estando o vector $\overline{O'Q}$ desfazado de um ângulo β em relação a

$\overline{O'P}$. A existência da folga que agora se passou a considerar necessária, obriga a que quando Q está sobre o eixo OY se verifique, ver figura 11,

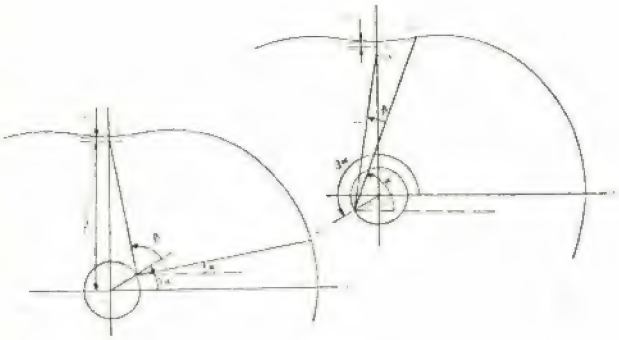


Fig. 11

módulo $(Q - O) < a + b - c$

mais propriamente

módulo $(Q - O) = a + b - c - f$ aonde f é a folga entre o cilindro e o rotor no eixo OY.

A existência de Q sobre o eixo OY é importante pois que o rotor e definido em grande parte da sua extensão por limitações provenientes de quando os seus pontos estão sobre esse eixo. Para o ponto Q estar sobre OY à distância $a + b - c - f$ de O, as variáveis α, β e H não são independentes (ver figura 11) e para cada peritrocoide e folga f, sendo dado α, os valores β e H ficam automàticamente definidos. As equações que definem β e H a partir de α são:

$$\begin{cases} c \cos 3\alpha + H \cos(\alpha + \beta) = O \\ c \cos 3\alpha + H \cos(\alpha + \beta) = a + b - c - f \end{cases} \quad (13)$$

Definindo a forma do rotor sòmente a partir da folga a existir no eixo OY, ela fica definida pelas equações (12) e (13). Uma fácil verificação disto consiste em obter por exemplo a curva da figura 5 ($a + b = 6$ cm, $c = 1$ cm), usando equação (13), isto é fazendo $f = O$. Para este caso particular, explicitando (13) resulta

$$\beta = \mathrm{Tag}_{-1} \frac{5 - \mathrm{sen}\, 3\alpha + \cos 3\alpha . \mathrm{Tag}\, \alpha}{-\mathrm{sen}\, 3\alpha . \mathrm{Tag}\, \alpha - \cos 3\alpha + \mathrm{Tag}\, \alpha} \quad (14)$$

e

$$H = \frac{-\cos 3\alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \quad (15)$$

Dando diferentes valores a α, obtêm-se os valores β e H que permitem desenhar a forma do rotor que deverá coincidir com a forma apresentada na figura 5. Usando este caminho obteve-se a figura 12.

Como foi dito as equações (12) e (13) dão a forma do rotor de modo a este passar sempre por um dado ponto sobre OY garantindo assim uma folga no ponto de estrangulamento do cilindro (ponto ao qual corresponde $\alpha = 90°$). A sobreposição das formas definida por equação (13) e forma limite do rotor, podem não ser suficientes para garantir uma ausência total de tangencialidade entre o rotor e cilindro. Este problema é tanto maior quanto menor for a folga considerada no ponto de estrangulamento. É que pode acontecer que a forma do rotor seja tal que garanta a folga considerada no ponto de estrangulamento (eixo OY) mas que por exemplo no ponto da peritrocoide coresponde a $\alpha = 100°$ ou

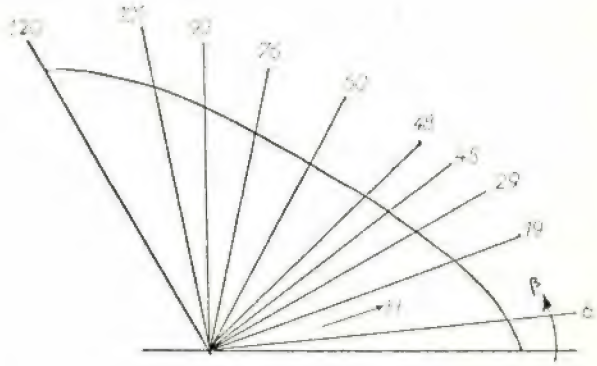


Fig. 12

110° continue a haver tangencialidade. Há então que proceder de modo semelhante ao feito quanto se achou a forma limite do rotor, secção 2.1.1; também aqui é preciso prever outros valores de α diferentes de 90° (equação (12), e (13) resultam de ter considerado pontos da peritrocoide definidos por $\alpha = 90°$, isto é, eixo OY) tendo então que se procurar a forma do rotor que passa por pontos da peritrocoide aos quais correspondem valores de α entre 90° e 120° e prevendo já a folga conveniente. Isto é apresentado na figura 13 aonde se vai procurar a forma do rotor que garanta sempre a sua passagem pelo ponto A_j definido na figura, havendo entre A_j e o cilindro uma dada folga. A solução deste caso que é a generalização da equação (13) em notação complexa é

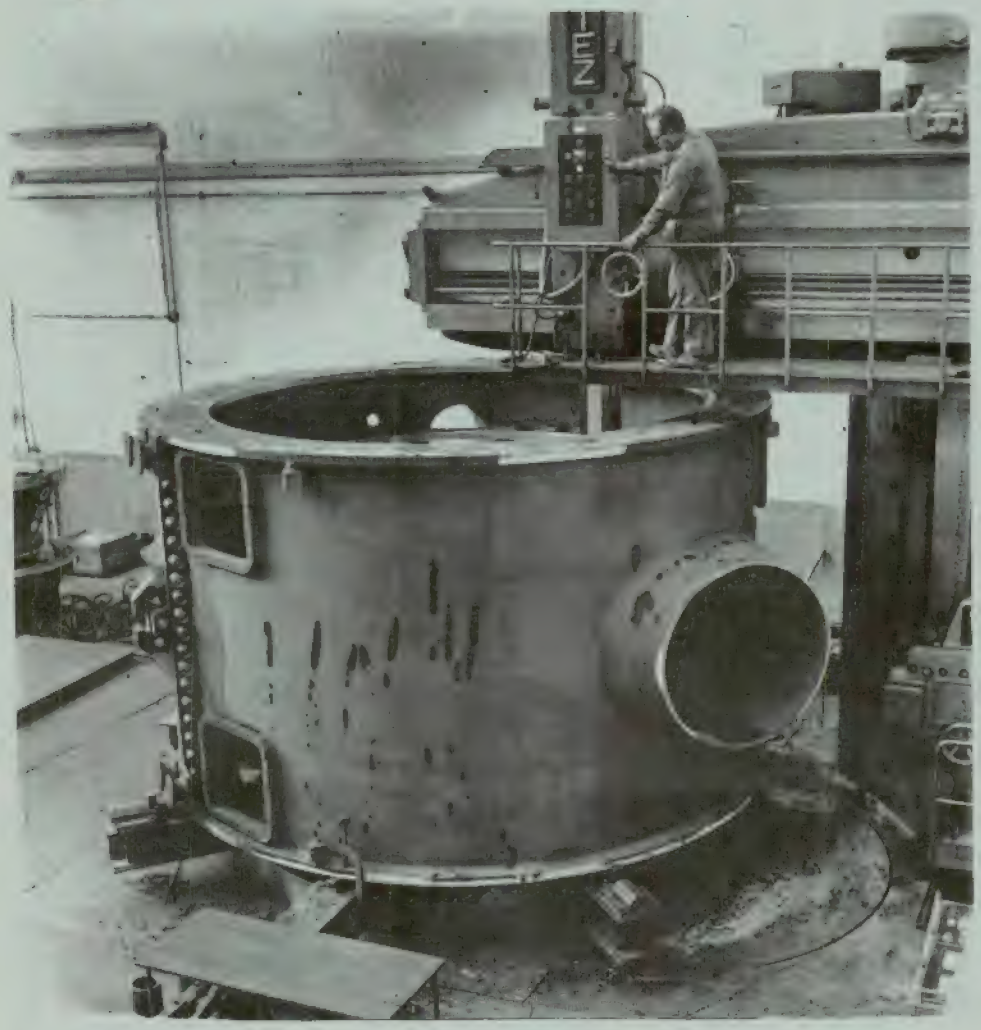
$$A_j = c\, e^{3\alpha} + H_j\, e^{\alpha + \beta_j} \quad (16)$$

aonde

$$A_j = A_{2j} + i\, A_{1j} \quad (17)$$

H_j é o módulo de vector $\overline{O'Q_j}$ aonde Q_j é o ponto genérico da forma do rotor quando este é definido por A_j. β_j é o ângulo entre $\overline{O'Q_j}$ e $\overline{O'P}$. A cada ponto A_j (distanciados do cilindro da folga considerada a qual deve ir diminuindo conforme α aumenta de 90° para 120°) corresponde uma curva para o rotor com o aspecto da apresentada na figura 12. O rotor será assim a envolvente interior às curvas definidas por (16) e (17).

MAGUE



Corpo de baixa pressão de turbina a vapor de 1.100 MW para a Central de Amos-Baltimore (USA) - torneamento do manto externo dos porta-alhetas - (encomenda da Brown Boveri & Cie)

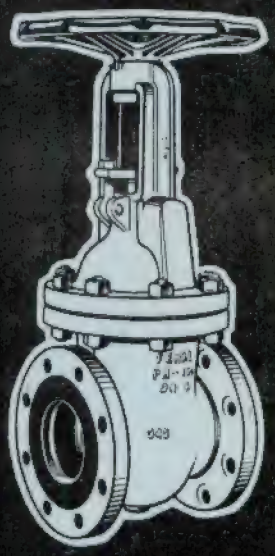
PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

SJF SUÇO-PORTUGUÊS 1 286/439/AR

VÁLVULAS
de cunha,
retenção, regulação
e passagem



Segundo normas DIN e ASA,
para líquidos, vapores e gases
(incluindo Cl, NH_3 e SO_2).
Execução em ferro fundido, aço
vazado, aço inoxidável
e ligas especiais.
Diâmetros nominais de 10 a 600mm.
Pressões nominais de 4 a 40 kg./cm².

ESTUDOS • PROJECTOS
ORÇAMENTOS
ASSISTÊNCIA TÉCNICA

SOCIEDADE PORTUGUESA
DE VÁLVULAS, L.DA

Rua da Academia das Ciências, n.º 5,
Lisboa-2 - Telefone P.P.C.A. 320011.

ETP 25

MERCEDES-BENZ
MOTORES
DIESEL

GRUPOS
ELECTROGÉNEOS
DE 14½ A 245 KVA

REPRESENTANTES
MENDES DE ALMEIDA, S.A.R.L.
ESCRITÓRIOS • ARMAZÉNS
OFICINAS • SALÃO DE VENDAS
AV. 24 DE JULHO, 54 A-G — LISBOA — TELEF. 66 77 94/8

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93
FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33
PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

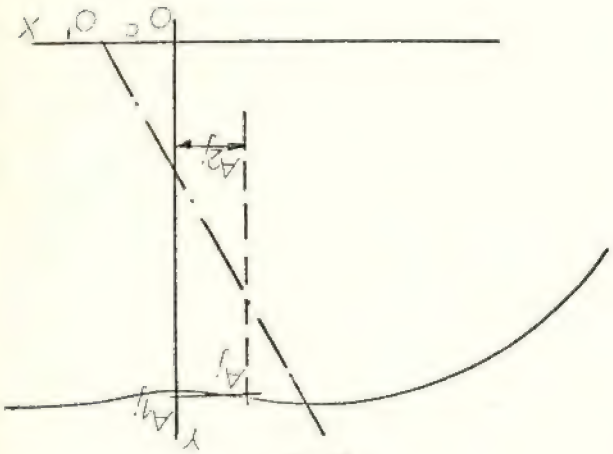


Fig. 13

o exposto é programável e o problema pode ser resolvido com computador.

Assim se conclui a exposição do método numérico para calcular a forma do rotor resultante do critério adoptado.

2.3.2 — Método geométrico

Seguindo as linhas gerais do método apresentado em 2.3 os valores H e β correspondentes a pontos da peritrocoide definidos por $\alpha = 90°$, podem ser geomètricamente obtidos medindo-os directamente sobre desenhos da peritrocoide. Semelhantemente ao que se passa para o caso do ponto de estrangulamento a obtenção por via geométrica de H_j e β_j (por outros valores de α) é realizável.

3. — Taxa de Compressão

Pretende-se agora encontrar uma relação entre a taxa de compressão e um parâmetro definidor da peritrocoide escolhida para forma do cilindro, pois que um dos condicionamentos que influi na escolha da peritrocoide é a taxa de compressão.

Considere-se um cilindro com a largura de L e com o formato correspondente a uma dada peritrocoide definida pelos parâmetros (a + b) e c como se apresenta na referência [1].

A taxa de compressão definida por (10), sendo a forma do rotor a limite como o apresentado em 2.1, pode ser calculado a partir de

$$\varepsilon = \frac{A_M}{A_m} \qquad (18)$$

aonde A_M e A_m são respectivamente as áreas máxima e mínima delimitadas por a peritrocoide e a curva definidora do rotor. Assim a taxa de compressão é independente da largura do cilindro sendo esta só considerada no cálculo da cilindrada pois

$$\text{cilindrada} = (A_M - A_m)\ L$$

3.1 — Variação da taxa de compressão com a + b e c. Homotetia.

Verificar-se-á que a taxa de compressão não varia com a variação de a + b e c desde que a relação (a + b)/c se mantenha.

Podendo a taxa de compressão ser calculada por (18) será

$$\varepsilon = \frac{\left(\int_A^B dx\,dy\right)_{\text{per.trocoide}} - \left(\int_A^C dx\,dy\right)_{\text{rotor}}}{\left(\int_D^E dx\,dy\right)_{\text{peritrocoide}} - \left(\int_D^E dx\,dy\right)_{\text{rotor}}} \qquad (19)$$

aonde os limites de integração ABC e D estão definidos na figura 14. Noutra notação representada na figura 14 a taxa de compressão poder-se-á escrever como

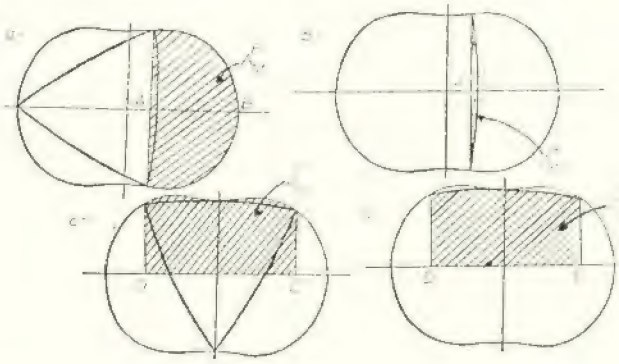


Fig. 14

$$\varepsilon = \frac{A_M^P - A_M^R}{A_m^P - A_m^R} \qquad (20)$$

A_M^P = área entre a peritrocoide e o eixo dos xx, representada na figura 14—a entre A e B.

A_M^R = área entre a curva do rotor e o eixo dos xx, representada na figura 14—b entre A e C.

A_m^P = área entrea peritrocoide e o eixo dos xx, representada na figura 14—c entre D e E.

A_m^R = área entre a curva do rotor e o eixo dos xx, representada na figura 14—d entre D e E.

Que se verifica homotetia nas peritrocoides vê-se a partir da sua equação (11), aonde multiplicando (a + b) e c pelo mesmo valor, mantendo-se portanto a razão (a + b)/c, resulta que Z = x + iy vem também multiplicado por ese factor, concluindo-se assim que existe a referida homotetia. Compreende-se também que verificando-se homotetia entre as peritrocoides, também se verificará entre as curvas definidoras das formas limites do rotor correspondentes às peritrocoides consideradas, pois que elas são a envolvente interior à família das peritrocoides.

Sendo

$$Rh = \frac{c_1}{c_2} = \frac{(a + b)_1}{(a + b)_2} \qquad (21)$$

a razão de homotetia entre duas peritrocoides, resulta que entre as áreas respectivas se verifique a relação

$$\text{Área}_1 = Rh^2 \ \text{Área}_2 \qquad (22)$$

pois que

$$\text{Área}_1 = \int dx_1 \, dy_1 = Rh^2 \int dx_2 \, dy_2 = Rh^2 \ \text{Área}_2$$

A relação entre

$$\varepsilon 1 = \frac{A^P_{M_1} - A^R_{M_1}}{A^P_{m_1} - A^R_{m_1}}$$

e

$$\varepsilon 2 = \frac{A^P_{M_2} - A^R_{M_2}}{A^P_{m_2} - A^R_{m_2}}$$

Taxas de compressão relativas a dois casos homotéticos de razão de homotetia Rh dado por (21), fàcilmente se vê ser

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Assim se demonstrou que variando (a + b) e c de modo a manter (a + b)/c, a taxa de compressão não varia pois verifica-se homotetia entre as peritrocoides.

A verificação de homotetia foi feita numèricamente para testar a precisão do método de obtenção das áreas. No quadro 1 são apresentadas medições das áreas do primeiro quadrante (desde x = 0° até x = 90°) referentes a peritrocoides homotéticas tais que (a + b)/c é igual a 6. As razões de homotetia dadas por (21) para os diferentes casos considerados e em relação ao caso particular de c = 1 cm estão na última coluna do quadro 1. Como as áreas referidas no quadro 1 são homotéticas podemo-las transferir para a peritrocoide de c = 1 cm e a + b = 6 cm. Os valores assim obtidos são apresentados no quadro 2. A variação obtida na segunda coluna deste quadro (que teòricamente devia ser um só valor) diz do rigor na obtenção das áreas. Assim se pode concluir que o erro é da ordem de 1%.

Ao concluir-se que a taxa de compressão se mantém mantendo a razão (a + b)/c verifica-se a importância da existência de uma relação entre a taxa de compressão e (a + b)/c, pois que sabendo o valor da taxa de compressão a usar fica-se a conhecer (a + b)/c e vice-versa. Como uma peritrocoide fica totalmente definida por dois parâmetros, (a + b) e c por exemplo, ε juntamente com um outro condicionamento especificam a superfície peritrocoidal a usar como cilindro.

3.2 — Taxa de compressão em função de (a + b)/c (forma limite do rotor)

Para obter o gráfico de variação da taxa de compressão em função de (a + b)/c, calcularam-se as curvas de variação das áreas máximas e mínimas com (a + b)/c. A maneira como essas áreas foram obtidas foi a descrita em 2.1 e grande número de peritrocoides foram consideradas (ver referência 2), tendo-se usado

QUADRO 1

(a + b)/c = 6			
caso	c (cm)	Área de um quadrante (cm^2)	$\frac{Rh_{caso}}{Rh_{c=1}} = c$
1	0,5	7,6	0,5
2	1,0	30,4	1,0
3	1,5	68,8	1,5
4	2,0	123,7	2,0

QUADRO 2

(a + b)/c = 6	
c (cm)	Área referida a c = 1 cm
0,5	30,4
1,0	30,4
1,5	30,6
2,0	30,7

para o mesmo (a + b)/c diferentes valores de c reduzindo depois as áreas por relações de homotetia a um mesmo valor da excentricidade, um centímetro.

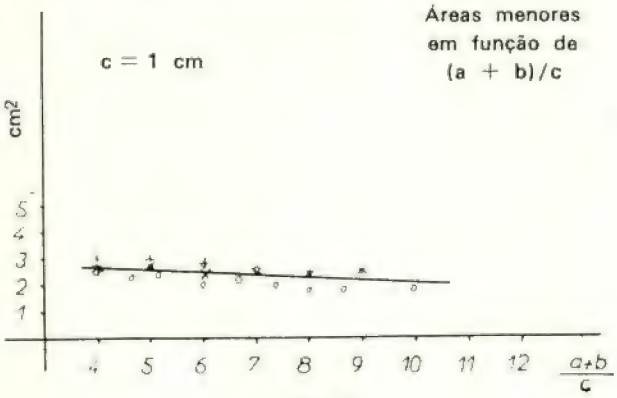


Fig. 15

A variação da área mínima com (a + b)/c está apresentada na figura 15 sob o aspecto de gráfico e a variação da área máxima é dada na figura 16.

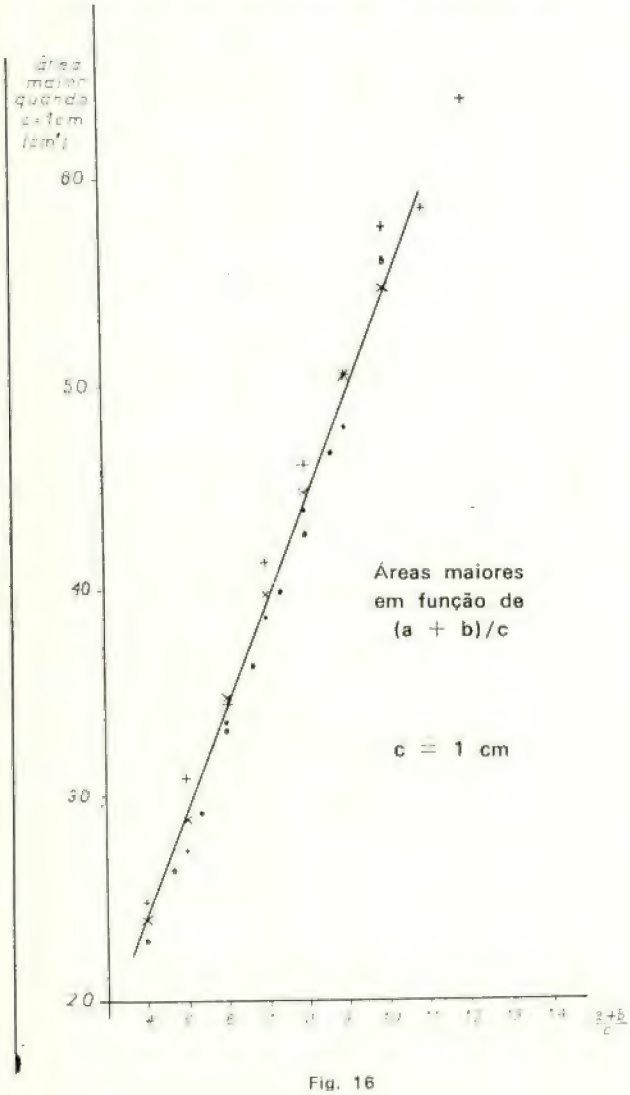


Fig. 16

A figura 17 mostra a curva de variação da taxa de compressão em função do parâmetro (a + b)/c.

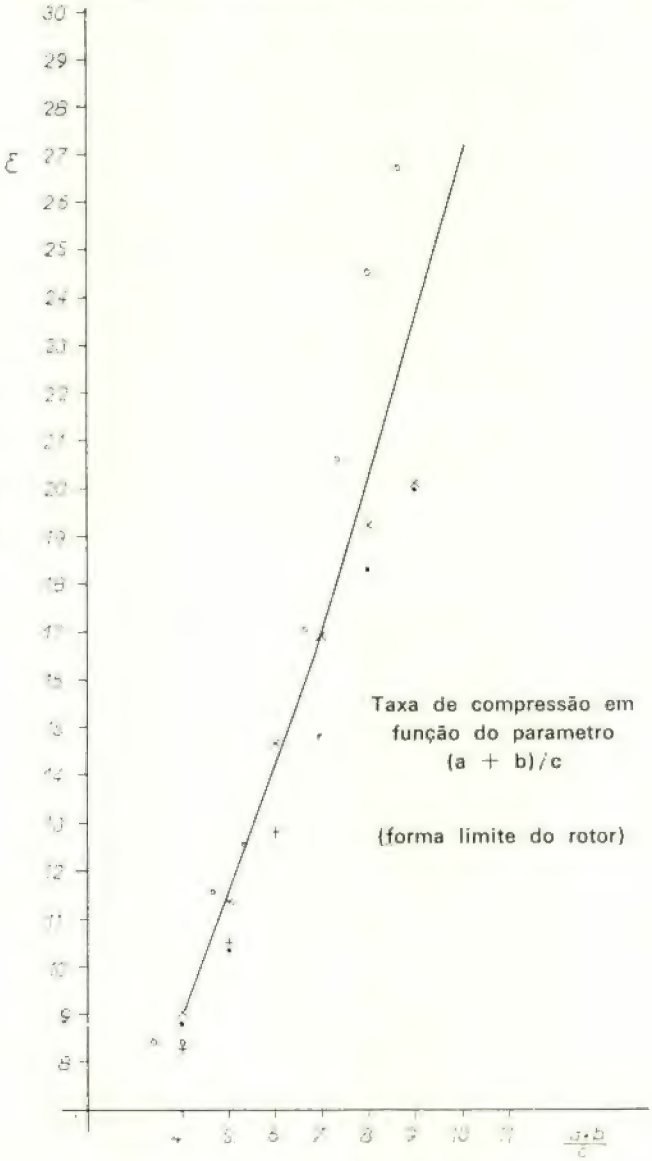


Fig. 17

Nas figuras 15 e 17 as diferentes simbologias usadas para referenciar os pontos, correspondem cada uma delas a um específico valor de c reduzido depois por homotetia.

3.3 — Taxa de compressão em função de (a + b)/c (forma real do rotor)

Na figura 17 é apresentado a taxa de compressão em função de (a + b)/c para o caso do rotor ter o formato limite referido em 2.1. Como se descreveu em 2.3 o volume mínimo real do motor tem sido geralmente considerado igual ao dobro do limite. Este volume adicional como em 2.3 foi descrito é distribuído

pelo volume devido à existência de folga entre o cilindro e o rotor e pelo volume da câmara suplementar na face do rotor. O aumento de volume devido à câmara é bastante maior que o proveniente da folga. Num motor real as taxas de compressão serão então diferentes das apresentadas na figura 17. O volume mínimo passa a ser aproximadamente o dobro do considerado em 3.2 e o volume máximo passa a ser o volume máximo mais o o volume mínimo usados em 3.2. Tendo isto em conta fàcilmente se encontra a curva da taxa de compressão real em função do parâmetro adimensional (a + b)/c, e assim se obteve a figura 18. Esta figura apresenta a curva que relaciona a taxa de compressão do motor Wankel real desenhado pelo critério descrito na secção 2.3, com (a + b)/c, parâmetro geométrico definidor da peritrocoide. Segundo este critério o volume mínimo real é o dobro do volume mínimo existente quando o rotor tem a forma limite, porém muito fàcilmente a partir das figuras 15 e 16 se podem obter gráficos para casos aonde a relação de volume mínimos (real e limite) seja outra, aumentando a taxa de compressão com a diminuição da razão volume mínimo real/volume mínimo limite.

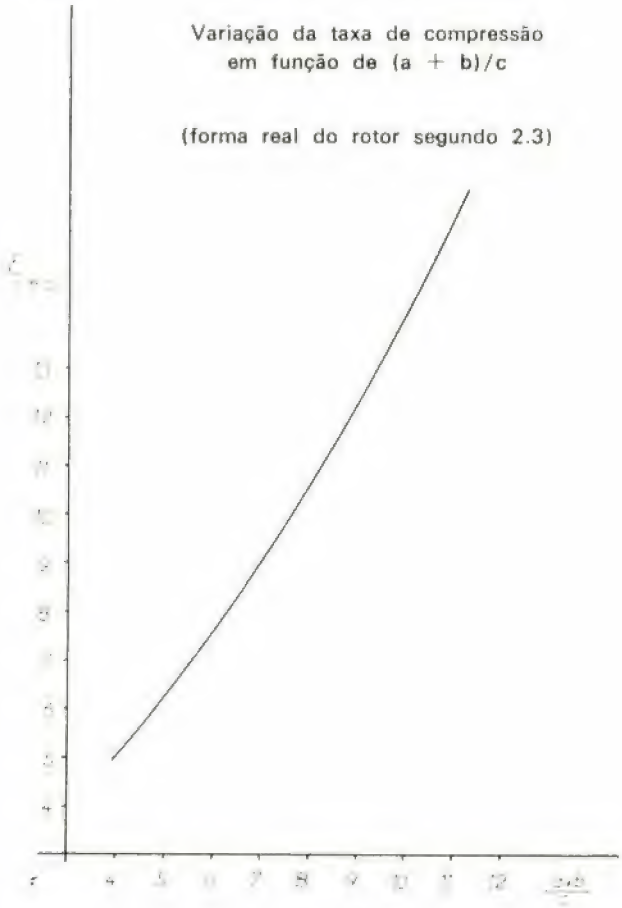


Fig. 18

BIBLIOGRAFIA

[1] — DURÃO, D. F. G. — Motores tipo Wankel Técnica, 396, 307 - 316, (1970).

[2] — DURÃO, D. F. G. — Estudo e Projecto de um Motor Wankel (1.° volume). Depart. Eng Mec. I. S. T., (1969).

[3] — ANSDALE, R. F. — NSU—Wankel engine. The Automobile Engineer 50, 166 - 176, (1960).

[4] — FROEDE, W. — NSU—Wankel engine. The Automobile Engineer 53, 302 - 312, (1963).

[5] — ANSDALE, R. F. — The Mazda 0813 Wankel engine. The Automobile Engineer 58, 152-156 (1968).

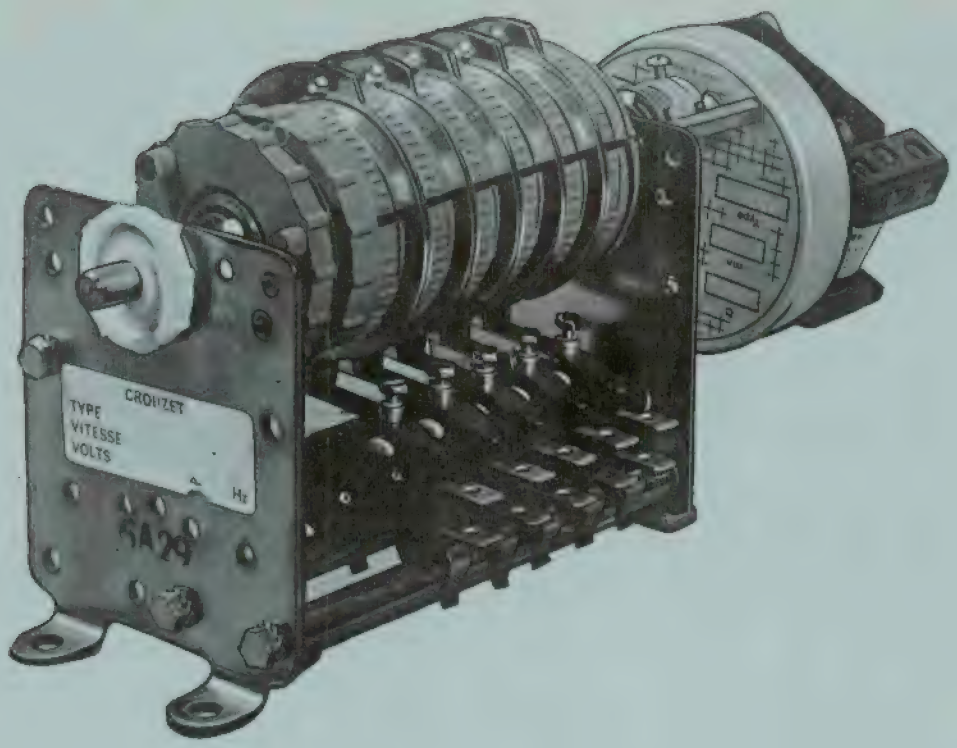
[6] — Apontamentos do curso experimental sobre motores Wankel, dado na NSU (Portugal), Dezembro (1968).

NOMENCLATURA

a + b = parâmetro definidor da peritrocoide
A, B, C e D = limites de integração ao achar as áreas definidoras da taxa de compressão
A e B = vértices do rotor (figura 8)
c = parâmetro definidor de peritrocoide = excentricidade
C, A, B E D = forma limite do rotor (figura 7)
E e D = câmara de combustão (figura 8)
f = folga entre o cilindro e o rotor
H = distância de O' a um ponto da curva do rotor
k = número de lóbulos da peritrocoide + 1
L = largura do cilindro
r = raio da circunferência fixa na geração da peritrocoide
R = raio da circunferência móvel na geração da peritrocoide
Rh = razão de homotetia
s = circunferência usadas na geração da peritrocoide
V = volume
XOY = sistema de coordenadas associados à peritrocoide
X'O'Y' = sistema de coordenadas associado ao rotor
α = parâmetro angular definidor de um ponto da peritrocoide em XOY
β = ângulo entre o vector referência e o vector definidor de um qualquer ponto sobre a curva do rotor
ε = taxa de compressão
δ = ângulo definidor da rotação absoluta de XOY em relação a X'O'Y'
φ = ângulo definidor da rotação da origem de XOY no sistema X'O'Y'.

Agradecimento

— Ao Prof. Eng.° A. Gouveia Portela o autor deseja expressar o seu agradecimento pela ajuda, sugestões e encorajamento dados.
— Aos Colegas V. Brederode e J. M. Figueira pela colaboração prestada.



AUTOMATISMO

CROUZET

TEMPORIZADORES
PROGRAMADORES
CONTROLADORES DE HORAS
CONTROLADORES DE SEGUNDOS
MICROMOTORES
MICROINTERRUPTORES
CELULASFOTOELECTRICAS
COMBINADORES

ELECTROTÉCNICOS REUNIDOS Lda.
av. duque de ávila, 66-3ª lisboa portugal

INDUSTRIAIS TEXTEIS

PARA OS VOSSOS MANCHONS, FLANELAS, TRANSPORTADORES,
E TODOS OS TECIDOS TÉCNICOS

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

Consultem:

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESIRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C.P. 2178 - Tel. 81 89 7

MOÇAMBIQUE
L. Marques - C.P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71 49 7

C. D. U. 620.17

A TEORIA DAS LINHAS DE ESCORREGAMENTO — APLICAÇÃO À EXTRUSÃO

ANTONIO DUARTE SILVA
EDUARDO C. MARÇAL GRILO
Engenheiros Mecânicos, Estagiários para Especialista de Serviço Técnico Geral do LNEC
Assistentes do I. S. T.

RESUMO

Este artigo é o primeiro de uma série de dois, cujo objectivo é estabelecer a teoria dos campos das linhas de escorregamento e a sua aplicação ao caso da extrusão. O segundo artigo terá como tema a aplicação da mesma teoria para o forjamento.

1 — INTRODUÇÃO

Da aplicação de um estado de tensão a um material resulta um determinado processo de deformação. Se se tratar de um processo de deformação estacionário como por exemplo a trefilagem, o estado de tensão que o origina depende da forma da ferramenta, dos atritos e dos contransgimentos provocados por cada elemento na sua vizinhança,não sendo portanto uniforme mas variando de ponto para ponto de modo a formar aquilo a que se chama correntemente um «campo de tensões não uniforme».

O estudo deste campo, que é o objectivo do presente trabalho, torna-se muito complexo, pelo que formularemos as seguintes hipóteses simplificativas:

1 a — Os materiais são considerados rígido-plásticos
1 b — Durante a deformação plástica as secções planas mantêm-se planas
1 c — O estado de deformação plástica é plano ($\varepsilon_2 = 0$)
1 d — É válido o critério de plasticidade de Coulomb.

2 — TEORIA DOS CAMPOS DAS LINHAS DE ESCORREGAMENTO

2.1 — Definição de campo de linhas de escorregamento

Veja-se como primeiro passo desta exposição teórica quais as simplificações que advêm para as leis gerais da plasticidade ao considerar as hipóteses atrás impostas.

Tendo em atenção as equações de Levy-Mises 2.a, apresentadas a seguir, pelo facto de se impor a hipóteses 1.c, leva a que por exemplo $d\varepsilon_2 = 0$ e portanto $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ ou $\sigma_2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

$$d\varepsilon_1 = \frac{2}{3}\,\delta\,\lambda\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right)$$

SYNOPSIS

In this first article of a series of two, the slip line field theory is presented, exemplifying in the end how this theory may be applied to extrusion. Tse second article will illustrate how the above theory may be used in forging.

$$d\varepsilon_2 = \frac{2}{3}\,\delta\,\lambda\left(\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right) \qquad (2.\ a)$$

$$d\varepsilon_3 = \frac{2}{3}\,\delta\,\lambda\left(\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right)$$

Traçando-se o círculo de Mohr para um estado de tensão em que $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ fig. 1 e tendo em atenção

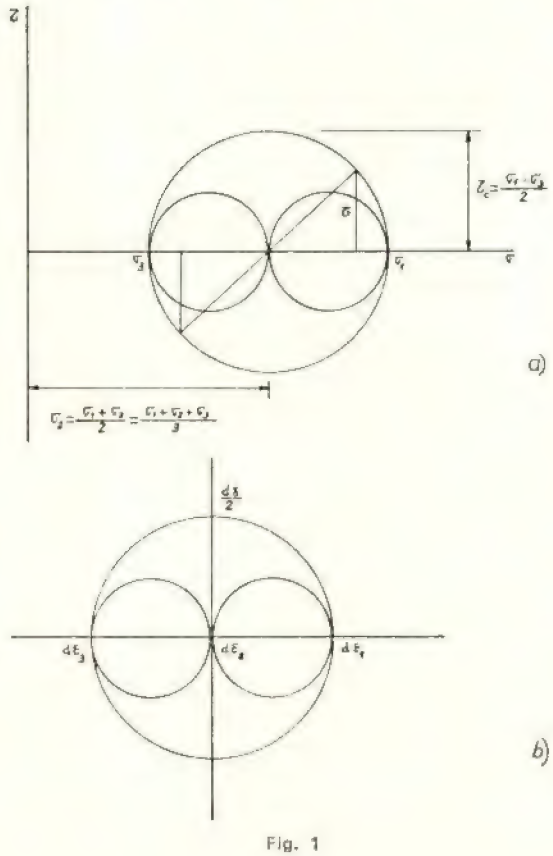


Fig. 1

o critério do Coulomb, Tresca conclui-se que à tensão σ médio $= \sigma_2$ corresponde a tensão de corte máxima $\tau_c = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Este plano também é aquele onde o distorção é máxima, o que fàcilmente se verifica através do plano das deformações associado ao ao plano das tensões considerando que a hipótese 1.c e a lei de Ste. Venant dão origem a que $d\varepsilon_1 = - d\varepsilon_3$ (da fig. 1 b $\dfrac{d\gamma}{2}$ é máximo para $d\varepsilon_2 = 0$).

Define-se «campo de linhas de escorregamento» como uma rede de curvas ortogonais ao longo das quais a tensão de corte τ é máxima ($\tau = \tau_c$).

De acordo com a definição dada, representa-se na fig. 2 um elemento de superfície em que cada face está sujeita a uma tensão normal média $\sigma = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ e a uma tensão de corte τ_c. Neste elemento σ_1 e σ_3 fazem ângulos de 45° com as linhas de $\tau = \tau_c$ (α e β na fig. 2) e σ_2 exerce-se no plano da figura perpendicularmente a σ_1 e σ_3. Portanto, um campo de linhas de escorregamento é um conjunto de linhas α e β, traçado no plano cuja normal é paralela à direcção σ_2, sendo α e β linhas ao longo das quais τ é igual a τ_c e $-\tau_c$ respectivamente. Como se sabe que é a tensão de corte máxima a responsável pela deformação plástica (hipótese 1d), a rede de linhas α e β será efectivamente a única responsável pela deformação plástica.

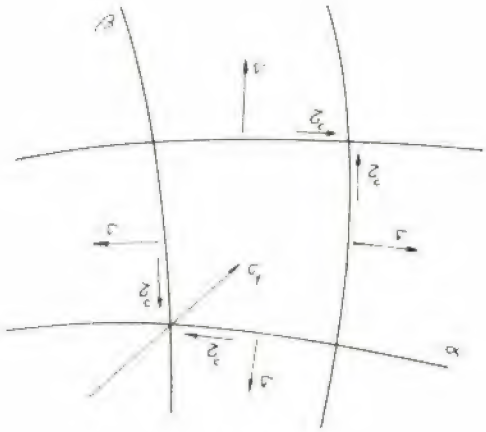


Fig. 2

2.1.1 — Relações de Hencky e equações de Geiringer

Considere-se agora a fig. 3 onde estão representadas uma linha de escorregamento α e uma β e apliquem-se as equações de equilíbrio em coordenadas cartesianas (2. b) às expressões de σ_x, σ_y e τ_{xy} em função de σ e τ_c

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (2.\ b)$$

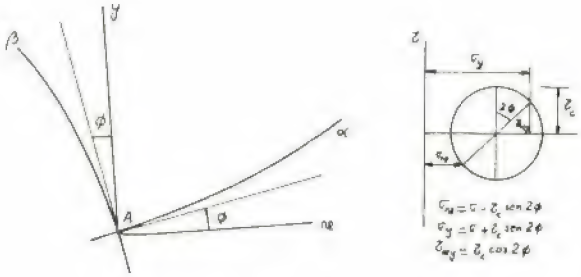


Fig. 3

Deste modo e com $\Phi = 0$ virá:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\,\tau_c \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\,\tau_c \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \qquad (2.\ c)$$

Integrando agora as expressões 2.c obtém-se

$$\sigma - 2\,\tau_c\,\Phi = c^{te}$$
$$\sigma + 2\,\tau_c\,\Phi = c^{te} \qquad (2.\ d)$$

sendo $\sigma - 2\,\tau_c\,\Phi$ constante ao longo de uma linha α e $\sigma + 2\,\tau_c\,\Phi$ constante ao longo de uma linha β.

As expressões 2.d permitem, dado o estado de tensão num ponto A, conhecer o estado de tensão noutro ponto qualquer das linhas α ou β que passam por A.

Se nas expressões 2.d σ for substituído por - p sendo p a pressão na linha de escorregamento, obtém-se

$$p + 2\,\tau_c\,\Phi = c^{te} \text{ ao longo de } \alpha$$
$$p - 2\,\tau_c\,\Phi = c^{te} \text{ ao longo de } \beta \qquad (2.\ e)$$

que são as relações de Hencky.

Baseado nestas relações 2.e Hencky demonstrou ainda que o ângulo formado pelas tangentes a duas linhas de escorregamento da mesma família, nos pontos em que estas são cortadas por uma linha de escorregamento da outra família, é constante ao longo do seu comprimento. (1.° Teorema de Hencky). Considere-se a fig. 4 onde se traçaram as tangentes a duas linhas α nos pontos AB e PQ e calcula-se $p_Q - p_A$ fazendo uso das expressões 2.e e percorrendo caminhos diferentes. Assim:

$$p_Q - p_A = (p_Q - p_B) + (p_B - p_A)$$
$$= 2\,\tau_c\,(2\,\Phi_B - \Phi_Q - \Phi_A)$$

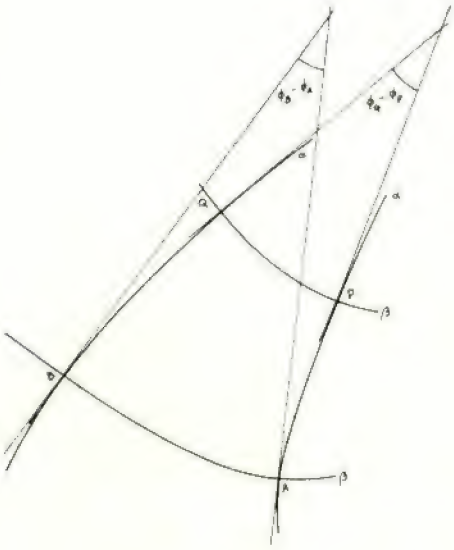


Fig. 4

Por outro lado

$$p_Q - p_A = (p_Q - p_P) + (p_P - p_A)$$
$$= 2\tau_c\,(\Phi_Q + \Phi_A - 2\,\Phi_p)$$

Igualando as duas expressões obtém-se

$$\Phi_P - \Phi_Q = \Phi_A - \Phi_B$$

que é a expressão que traduz o 1.° teorema de Hencky.

Num campo de linhas de escorregamento é importante saber quais são as linhas $\alpha\,\alpha$ e quais as $\beta\,\beta$. Para isso recorre-se à regra prática que a seguir se enuncia. Rodando no sentido contrário aos ponteiros do relógio, em torno de um ponto de intersecção de duas linhas de escorregamento, se se começar duma α a maior tensão principal, isto é, σ_1, será encontrada antes de se atingir a linha β (fig. 5).

Assim pode-se afirmar que a linha α está associada com a tensão de corte positiva e a linha β associada com a tensão de corte negativa.

As equações de Geiringer são do tipo das relações de Hencky, mas dizendo respeito às velocidades. Portanto para as estabelecer interessa agora determinar as velocidades deescorregamento u e v ao longo de α e β respectivamente

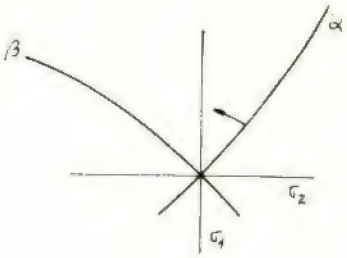


Fig. 5

Da fig. 6 tira-se que

$$(v + dv)\cos\delta\Phi + (u + du)\,\mathrm{sen}\,\delta\Phi = v$$

$$(u + du)\cos\delta\Phi - (v + dv)\,\mathrm{sen}\,\delta\Phi = u$$

Mas no limite quando B $\rightarrow$ A $\quad \cos\delta \rightarrow \Phi\,1$

$\mathrm{sen}\,\delta\Phi \rightarrow \delta\Phi$

o que substituindo dá:

$$\frac{\delta u}{\delta\Phi} - v = 0 \text{ ao longo de } \alpha$$

$$\frac{\delta v}{\delta\Phi} + u = 0 \text{ ao longo de } \beta$$

São estas as equações de Geiringer.

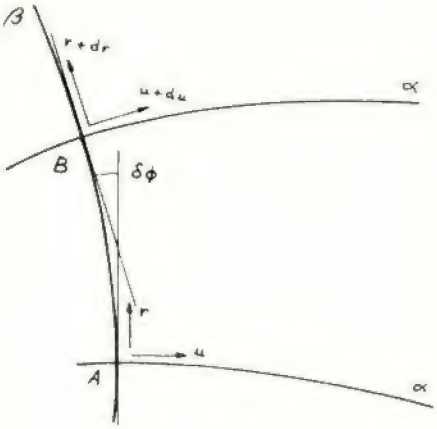


Fig. 6

2.2 — Método geométrico de Prager

O método geométrico de Prager é um método geométrico que permite traçar o campo de linhas de escorregamento para um escoamento plástico. Será este o método utilizado nas aplicações práticas apresentadas na parte final deste trabalho, mas antes de entrar pròpriamente na sua descrição torna-se necessário introduzir o conceito de pólo de circulo de Mohr tal como Prager o utilizou.

Considere-se (fig. 7) um ponto P localizado num campo de tensões.

Conhecendo o estado de tensão por exemplo em PP_1, dado por σ'_N, τ', e conhecendo também o valor de τ_c para o material, é possível construir o círculo de Mohr do estado de tensão em P (como convenção para o sinal da tensão de corte ela será negativa quando fizer rodar o plano no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio).

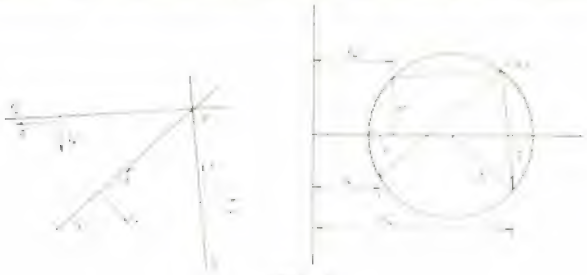


Fig. 7

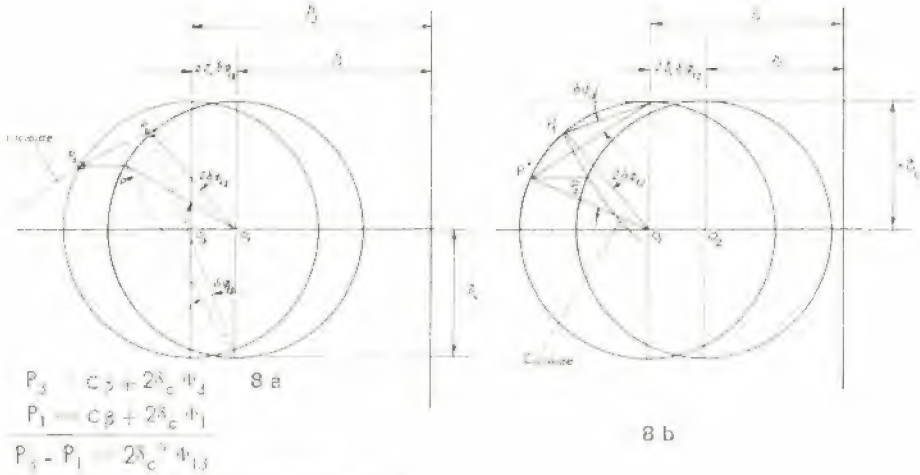
Define-se «pólo do círculo de Mohr» como o ponto da superfície de círculo no qual passam rectas que intersectam a circunferência nos pontos que definem o estado de tensão nos planos aos quais essas rectas são paralelas.

Na fig. 7 obtém-se a posição do pólo traçando pelo ponto de coordenadas σ'_N, $-\tau'$ uma paralela a PP_1.

Conhecida a posição do pólo, exemplifica-se também na fig. 7 a obtenção dos valores de σ_N, τ e σ''_N, τ', traçando pelo pólo paralelas aos planos PP_2 e PP_3 respectivamente.

A localização de um pólo permite ainda obter a direcção das linhas α e β naquele ponto traçando pelo pólo as duas rectas que intersectam o círculo de Mohr em $+\tau_c$ e $-\tau_c$.

Pode-se agora finalmente descrever o método geométrico de Prager. Viu-se, através das relações re Hencky, que, ao longo de uma linha α ou β, $\delta p = \pm 2\tau_c \delta\Phi$; então, traçando o círculo de Mohr, como a abcissa do seu centro é sempre $\sigma = -p$, o dito círculo mover-se-á ao longo de uma linha de escorregamento de $\pm 2\tau_c \delta\Phi$ em que $\delta\Phi$ representa a variação angular ao longo da linha. Isto é, para uma variação $\delta\Phi$ o raio de círculo de Mohr roda de $2\delta\Phi$, e sendo o raio igual a τ_c o pólo move-se de $2\tau_c\delta\Phi$. Sendo assim pode-se afirmar que, ao longo de uma linha de escorregamento, o pólo do círculo de Mohr traça uma ciclóide quando o círculo rola sem escorregar ao longo da sua tangente superior ou inferior paralela ao eixo dos $\sigma\sigma$. Na fig. 8 exemplifica-se o que se acabou de expor.



$P_3 = C\beta + 2\delta_c \Phi_3$ 8 a

$P_1 = C\beta + 2\delta_c \Phi_1$

$P_3 - P_1 = 2\delta_c \Phi_{13}$

8 b

Traçado da ciclóide — 8 a — Círculo rolando em $-\delta_c$

8 b — Círculo rolando em $+\delta_c$

Fig. 8

Na fig. 9 apresenta-se o exemplo de um campo de linhas de escorregamento para uma extrusão directa sem atrito e para uma relação de espessura de 2/1. Como já foi dito, a cada linha de escorregamento no plano físico corresponde uma cilóide de Mohr, na figura chamada de plano das tensões. Na figura está apenas representada a ciclóide de linha 12345. Como se pode observar na figura, a ciclóide é sempre perpendicular à linha de escorregamento em pontos que se correspondem. Na fig. 9 está um terceiro diagrama também devido a Prager e que é o hodógrafo ou diagrama das velocidades de escoamento plástico ao longo de cada linha de escorregamento. A sua construção está justificada na fig. 10, onde se representa mais uma vez uma linha α e uma β e dois pontos 1 e 2 ao longo da linha α. Se v_1 e v_2 forem as velocidades absolutas em cada um desses pontos para que se verifiquem as equações 2.f de Geiringer é necessário que o acréscimo de velocidade seja perpendicular à linha de escorregamento, fig. 10 a. Generalizando, e no caso da linha de escorregamento ser uma curva (fig. 10 b), o acréscimo será também uma curva perpendicular à linha de escorregamento nos pontos que se correspondem. Tinha-se visto atrás que o mesmo se passava entre a ciclóide e a linha de escorregamento: vê-se agora que a ciclóide e os acréscimos de velocidade são paralelos em pontos que se correspondem.

Finalmente e antes de se entrar nos exemplos de aplicação, convém enunciar as três regras básicas que presidem ao traçado de um campo de linhas de escorregamento.

1.ª — Num ponto singular deve-se sempre tentar que o campo das linhas de escorregamento seja em «leque». Ex.: veja-se a fig. 9 e repare-se na posição do chamado ponto singular relativamente ao «leque» das linhas α e β

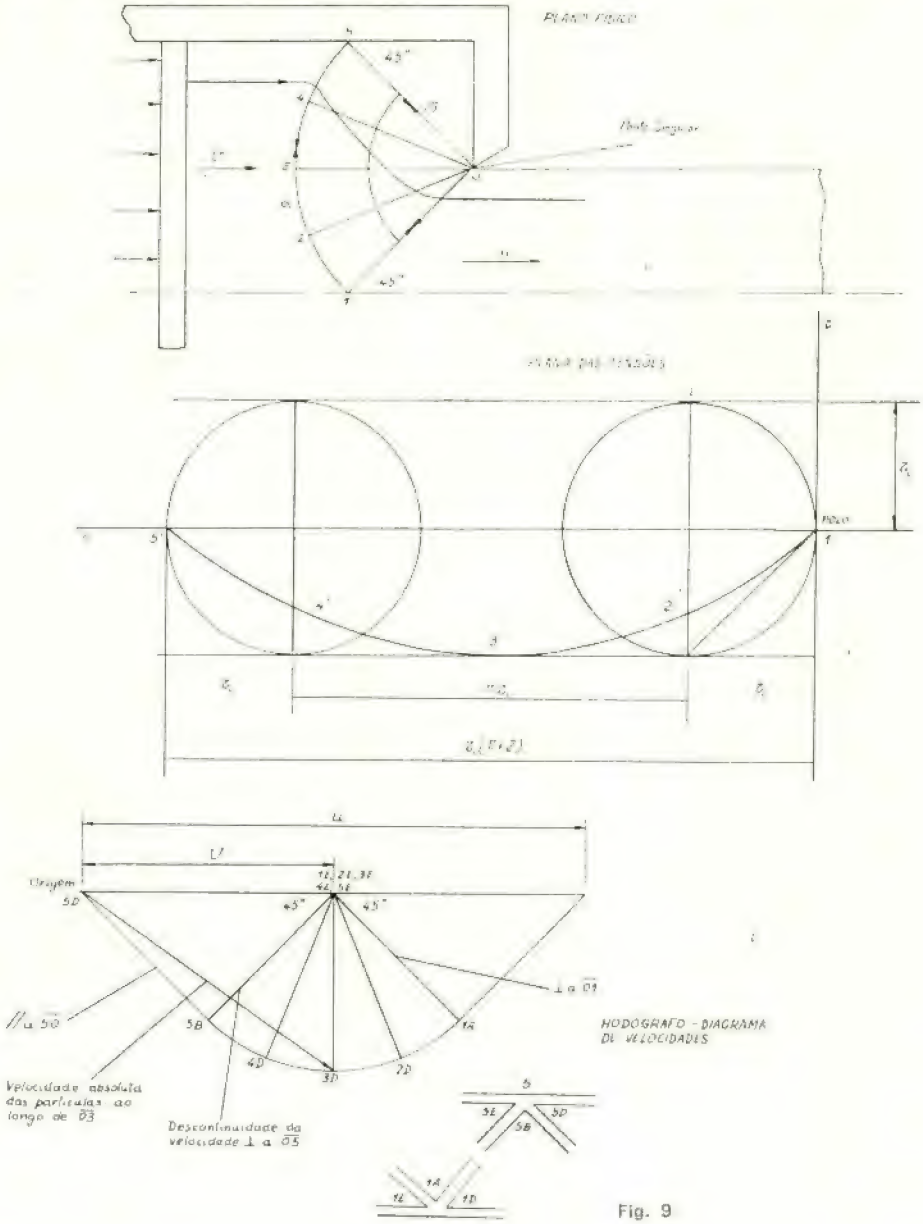


Fig. 9

2.ª — Quando se usa lubrificação durante o processo, de enformação, isto é, quando não há atrito, as linhas de escorregamento encontram os limites de material segundo ângulos de 45° Ex.: veja-se o ponto 5 da fig. 9.

3.ª — As linhas de simetria e as linhas de escorregamento cruzam-se segundo ângulos de 45°.

3 — APLICAÇÃO À EXTRUSÃO

As figuras 11, 12, 13, 14 e 15 mostram o campo das linhas de escorregamento, o plano das tensões e o diagrama das velocidade para quatro tipos de extrusão.

Como se pode observar, no caso de não existir lubrificação as linhas de escorregamento cortam a fronteira segundo ângulos de 0° e 90° conforme se trate de uma β ou uma α.

Na fig. 12 está assinalada no círculo A a construção utilizada para colocação das linhas $\alpha\alpha$ e $\beta\beta$ a 90° entre si.

NOTAÇÃO

α — linha de escorregamento com $\tau = +\tau_c$
β — linha de escorregamento com $\tau = -\tau_c$
γ — distorsão
ε — extensão
$d\varepsilon_1$ $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ — acréscimos das extensões principais
σ_1 — σ_2 — σ_3 — tensões principais
σ_N — tensão (representação geométrica de Prager)
τ — tensão de corte
τ_c — tensão de corte crítica
Φ — ângulo entre duas tangentes a uma linha α ou uma linha β
$\delta\lambda$ — factor de proporcionalidade do regime plástico
u, v — componente de velocidade ao longo de α e β respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

«Manufacturing Properties of Materials» — J. M. Alexander and R. C. Brewer - Van Nostrand.

«Advanced Mechanics of Materials» — H. Ford — Longmans.

«Introduction to Plasticity» — W. Prager — Addison — Wesley. Reading Man, 1959.

«Plasticity for Mechanical Engineers» — W. Johnson and P. B. Mellor — Van Nostrand.

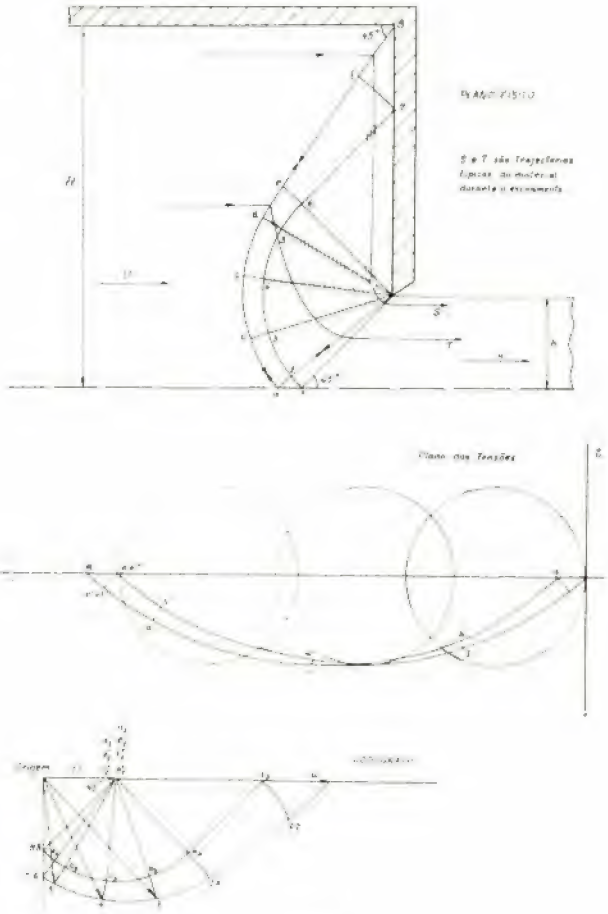


Fig. 11

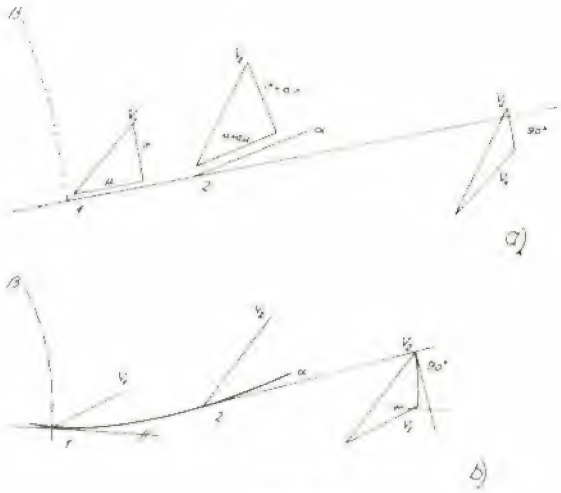


Fig. 10

Extrusão sem atrito com $\frac{H}{h} = \frac{2}{1}$

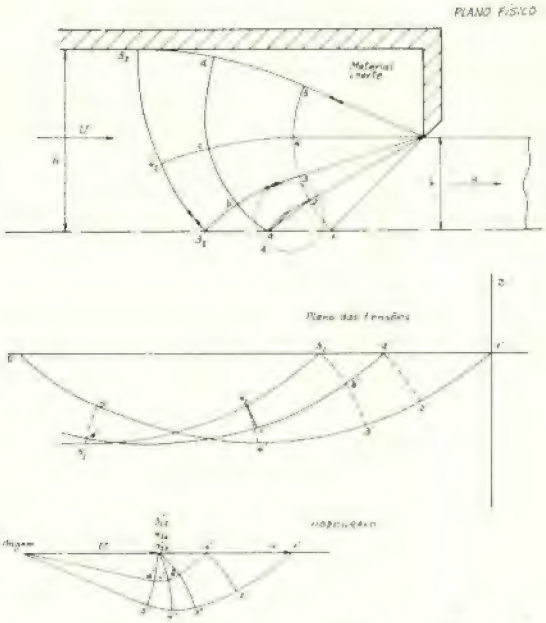


Fig. 12 Extrusão com atrito com $\frac{H}{h} = \frac{2}{1}$

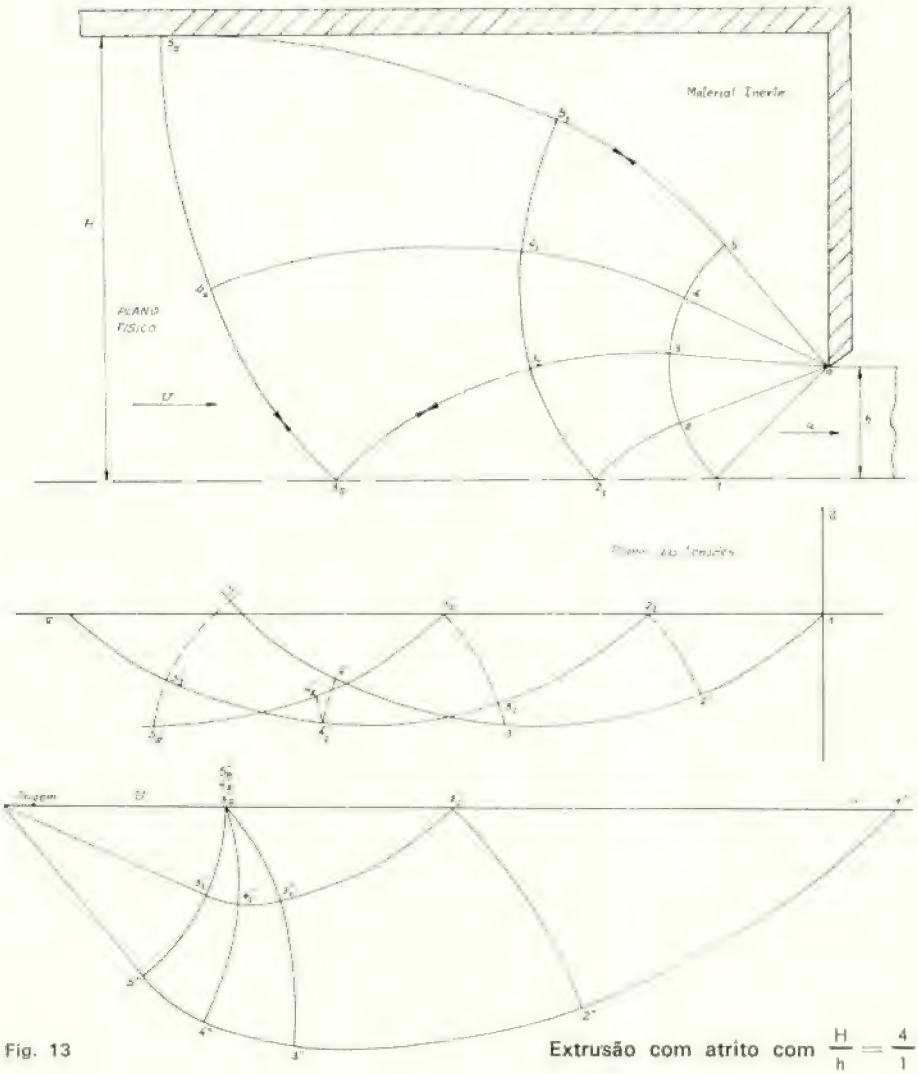


Fig. 13 Extrusão com atrito com $\frac{H}{h} = \frac{4}{1}$

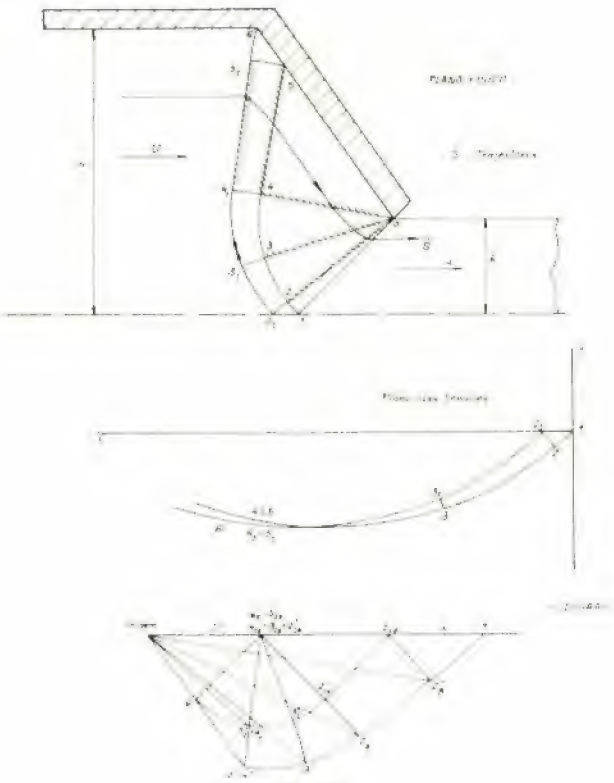


Fig. 14

Extrusão com atrito em matriz oblíqua $\frac{H}{h} = \frac{3}{1}$

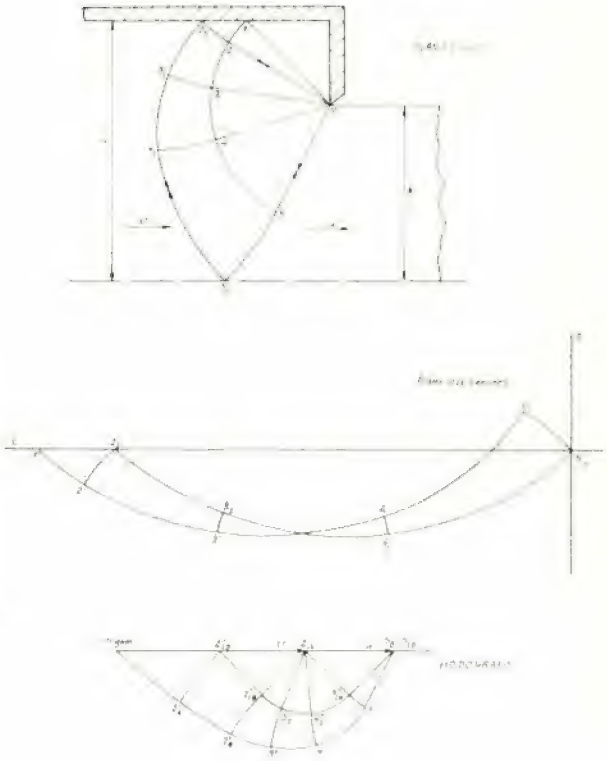


Fig. 15

Extrusão com atrito e com a relação $\frac{H}{h}$ inferior a 50%

HIDREL

TÉCNICA DE HIDRÁULICA
E DE ELECTRICIDADE, LDA.

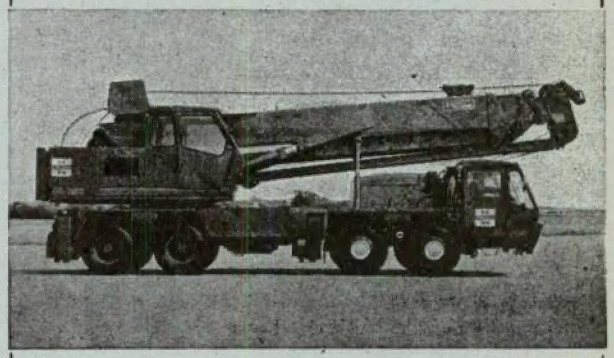
Grupos moto e electro-bomba
Grupos electro-bomba submersíveis
Grupos de eixo vertical «JOHNSTON»
Contadores para líquidos «LANGE»
Aparelhagem de medida «METRIMPEX»
Motores Eléctricos
Hidro-injectores
Válvulas e torneiras
Manómetros e Vacuómetros «HAENNI»
Rega por aspersão

ASSISTÊNCIA TÉCNICA

Rua do Alecrim, 47-A-B — Rua do Lumiar, 113
Telefs. 32 57 00 - 3 59 66 LISBOA Telef. 79 03 55

R
RUSTON-BUCYRUS
B

ESCAVADORAS
GRUAS
SONDAS



GRUA DE LANÇA TELESCÓPICA MOD. 45-RBC
CAPACIDADE 25 TON.

MONTEIRO GOMES, LDA.

Rua Cascais 47 — LISBOA - 3
Telef 63 70 83/4/5 — (a Alcântara)

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

Plessey Automática Eléctrica Portuguesa
S. A. R. L.

Fabricante de Material Telefónico, Telecomunicações e Sinalização de Trânsito

Administração, Fábrica e Escritórios:

Avenida Infante D. Henrique, 333 — Lisboa
Telefone 31 31 71

Apartado 1060 — Telegramas: PLESSEY
TELEX 1190 PAEP P

DELEGAÇÕES:

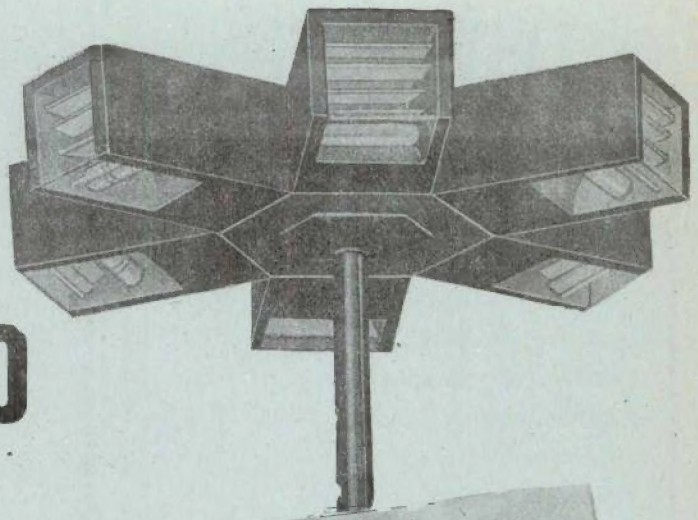
Norte — Rua Gonçalo Cristóvão, 140 - 2.º Esq.
Porto — Telef. 3 39 26 - 38 01 38

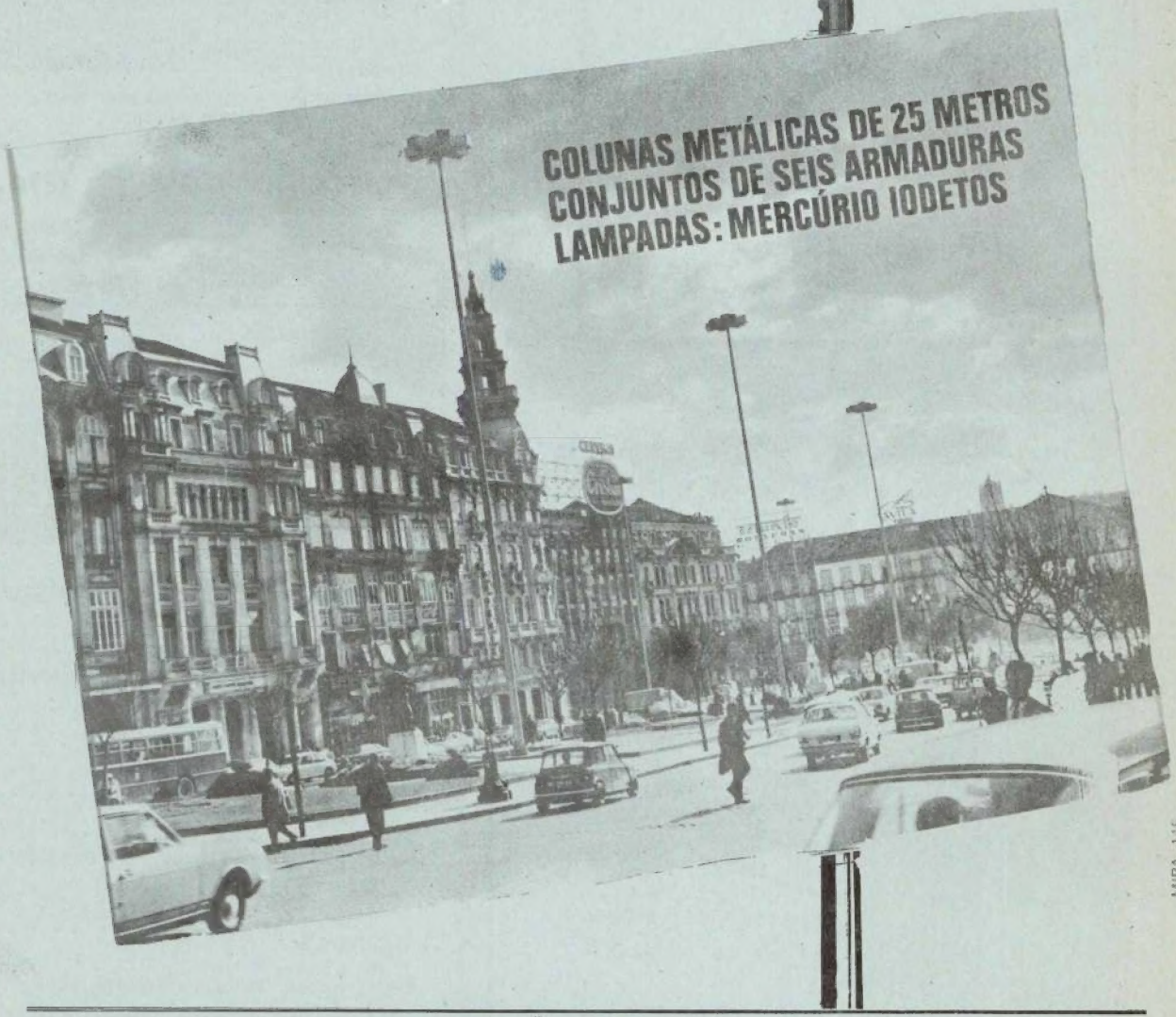
Angola — Avenida General Carmona, 70/70 - A
Luanda - Angola — Caixa Postal 6853
Telefone 2 36 21

Moçambique — Rua da Electricidade, 4
Lourenço Marques - Moçambique
Caixa Postal 2686, Telefone 2 56 18

PORTO-1972

NOVA ILUMINAÇÃO





MIRA-14F

SCHRÉDER, SARL

PROJECTO E FABRICO DOS CONJUNTOS INTEGRADOS DE ARMADURAS

PHILIPS PORTUGUESA, SARL	VERTICAL, LDA.
LÂMPADAS HPI/T 1000 WATT E RESPECTIVOS ACESSÓRIOS	COLUNAS METÁLICAS CONCRETE UTILITIES, INGLATERRA

C. D. U. 624.131.25 : 624.131.439
553.54

DEFORMABILIDADE DE ROCHAS XISTOSAS (*)

J. LOUREIRO PINTO
Engenheiro Civil, Especialista do Serviço de Barragens do LNEC

RESUMO

Neste trabalho apresentam-se os resultados de ensaios de compressão uniaxial de rochas xistosas, obtidos quer em ensaios em laboratório quer em ensaios de campo, e estudam-se as variações do módulo de elasticidade, dos coeficientes de Poisson, do coeficiente de dilatação cúbica e do ângulo formado pelas direcções principais de tensão e de deformação com o ângulo formado com o normal à xistosidade.

SYNOPSIS

In the present paper, the results of laboratory and in situ uniaxial compression tests of schistous rocks are presented, an analysis being made of the variation of the modulus of elasticity, of the Poisson's ratio, of the coefficient of unit volume expansion and the relation between principal directions of stress and strain with the angle between a given direction and the normal to the schistosity.

1 — INTRODUÇÃO

No estudo das rochas xistosas determinam-se geralmente apenas a deformabilidade normal e a paralela à xistosidade, por se supor fornecerem os valores extremos das características mecânicas. Contudo, no estudo de algumas rochas xistosas verificou-se que o valor mínimo do módulo de elasticidade não coincidia com a direcção normal aos planos de xistosidade, utilizando-se uma fórmula empírica da forma:

$$x^2 y^2 + ax^2 + by^2 + c = 0$$

que representava com muita aproximação a variação do módulo de elasticidade com a direcção [1].

Neste estudo assemelham-se as rochas xistosas ao corpo transversalmente isotrópico e apresentam-se os resultados obtidos quer em ensaios de laboratório efectuados sobre rochas xistosas provenientes de locais diferentes, quer em ensaios efectuados no campo sobre rochas do mesmo tipo.

2 — GENERALIDADES

Considere-se um corpo transversalmente isotrópico e um sistema triortogonal de eixos oxyz, tal que o eixo dos zz é normal ao plano de isotropia, sendo os eixos dos xx e dos yy paralelos a ele (fig. 1).

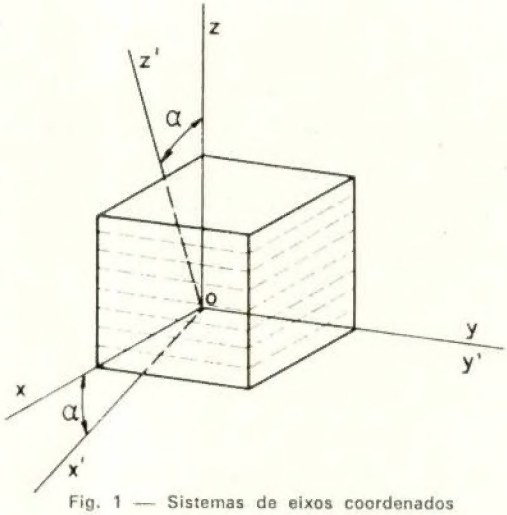


Fig. 1 — Sistemas de eixos coordenados

As constantes elásticas deste corpo em relação a este sistema de eixos [2], [3] são:

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}\ ;\ a_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\ ;\ a_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}$$

$$a_{33} = \frac{1}{E_z}\ ;\ a_{44} = \frac{1}{G_{xz}}\ ;\ a_{66} = \frac{2\,(1+\nu_{xy})}{E_x}$$

(*) Trabalho apresentado em inglês no 2.º Congresso da Sociedade Internacional de Mecânica das Rochas, Belgrado, 1970.
Artigo recebido em 9/3/71.

O corpo possuí cinco constantes elásticas independentes, E_x, E_z, ν_{xy}, ν_{xz} e G_{xz}. Fazendo agora [4]:

$$\frac{E_z}{E_x} = \frac{\nu_{xz}}{\nu_{zx}} = k \quad \text{e} \quad d = \frac{E_z}{G_{xz}} - 2(1 + \nu_{xz})$$

todas as equações se podem pôr em função das constantes elásticas independentes, E_z, ν_{xy}, ν_{xz} e dos parâmetros k e d, que se podem designar por coeficientes de anisotropia axial e coeficiente de anisotropia curvilínea.

Num novo sistema de eixos triortogonal ox'y'z' em que o eixo y'y'coincide com o eixo dos yy, e os eixos x'x' e xx e z'z' e zz fazem entre si um ângulo α (fig. 1), as constantes elásticas E'_z, ν'_{xz}, ν'_{yz} em função de E_z, ν_{xy}, ν_{xz}, k, d e α, [4], podem escrever-se sob a forma:

$$E'_z = \frac{E_z}{1 + d\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha - (1-k)\,\text{sen}^4\alpha}$$

$$\nu'_{xz} = \frac{\nu_{xz} + (d + 1 - k)\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{1 + d\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha - (1-k)\,\text{sen}^4\alpha}$$

$$\nu'_{yz} = \frac{k\,\nu_{xy}\,\text{sen}^2\alpha + \nu_{xz}\cos^2\alpha}{1 + d\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha - (1-k)\,\text{sen}^4\alpha}$$

Se o corpo for actuado apenas pela tensão normal σ'_z paralela ao eixo z'z', o ângulo ω formado pelas direcções principais de tensão e de deformação [4] será dado por:

$$\omega = \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\left[2(d + 1 - k)\,\text{sen}^2\alpha - d\right]\text{sen}\,\alpha\,\text{cos}\,\alpha}{1 + \nu_{xz} + (2d + 1 - k)\,\text{sen}^2\alpha - 2(d + 1 - k)\,\text{sen}^4\alpha}$$

e o coeficiente de dilatação cúbica θ' [4] será:

$$\theta_z = \frac{\sigma'_z}{E_z}\left\{1 - 2\,\nu_{xz} - \left[(1-k) - (k\,\nu_{xy} - \nu_{xz})\right]\text{sen}^2\alpha\right\}$$

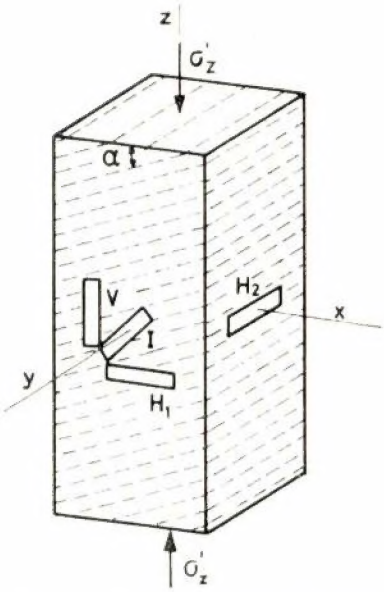
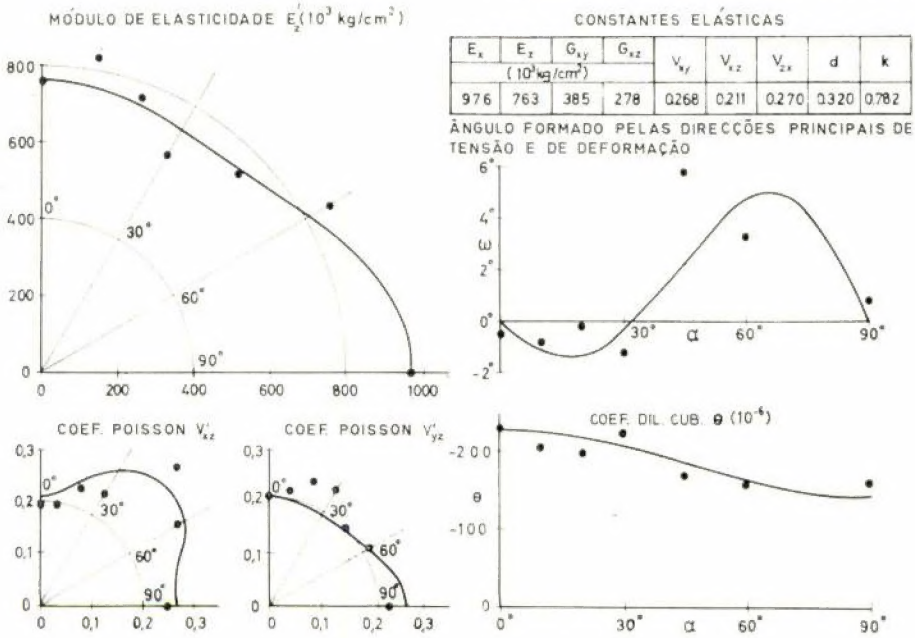


Fig. 2 — Colocação dos extensómetros

A análise do comportamento mecânico das rochas xistosas estudadas será feita com base nestas expressões.

3 — ENSAIOS DE LABORATÓRIO

A partir de blocos de rocha foram cortados vários prismas de secção quadrada e de altura igual a 2,5 vezes a largura, preparada de modo que em duas das faces



E_x	E_z	G_{xy}	G_{xz}	ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{zx}	d	k
(10^3 kg/cm²)								
976	763	385	278	0.268	0.211	0.270	0.320	0.782

Fig. 3 — Ensaios de laboratório, xisto I